Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Д. П. ЮЩЕНКО, О. В. ЯКУБОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Гомель 2008

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины”

Д. П. ЮЩЕНКО, О. В. ЯКУБОВИЧ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов математических специальностей вузов

Гомель 2008

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.12 я 73
Ю 985

Рецензенты:
В. И. Мироненко, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”;
кафедра математического анализа учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования “Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины”

Ющенко, Д. П.
Ю 985 Математический анализ. Кратные интегралы: практическое пособие для студентов математических специальностей вузов / Д. П. Ющенко, О. В. Якубович; М-во образования РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины.— 2008. — 97 с.
ISBN 978-985-439-300-1

В пособии изложены основные положения теории кратных интегралов, разобраны решения задач, связанных с вычислением двойных и тройных интегралов, приведены задания для самостоятельной работы.
Пособие предназначено студентам математических специальностей вузов. Будет полезно студентам других специальностей, изучающим математический анализ.

УДК 517.37(075.8)
ББК 22.161.12 я 73

ISBN 978-985-439-300-1

Содержание

Введение

Тема „Кратные интегралы“ в математическом анализе является одной из трудных тем как для преподавания, так и для восприятия студентами. Обычно изложение этой темы происходит по схеме: измеримое по Жордану множество, интеграл на измеримом по Жордану множестве и т. д. Такая схема предложена в учебниках Л. Д. Кудрявцева [6] и А. М. Тер-Крикорова, М. И. Шабунина [8]. Согласно образовательному стандарту специальности „Математика“ эта схема изменена: сначала определяется интеграл на брусе, вводится понятие измеримого по Жордану множества через понятие интеграла на брусе, а только затем определяется интеграл на измеримом по Жордану множестве и т. д. Такое изложение материала есть в учебниках В. А. Зорича [4] и Л. И. Камынина [5]. Именно по такой схеме в предлагаемом пособии изложены основные положения теории кратных интегралов (понятие бруса, интегральная сумма и интеграл функции на брусе, суммы Дарбу и их свойства, критерий Дарбу интегрируемости функции, множества лебеговой и жордановой меры нуль, критерий Лебега интегрируемости функции на брусе, измеримые по Жордану множества, интеграл по измеримому по Жордану множеству, критерий Лебега интегрируемости, свойства кратного интеграла, теорема Фубини, замена переменной в кратном интеграле, несобственные кратные интегралы). Читателю рекомендуется обратить внимание на замечания, приведенные в тексте — именно в них разъясняются наиболее трудные и „опасные“ моменты в понимании того или иного определения или теоремы.

Второй составной частью пособия является раздел с решениями примеров, связанных с двойными и тройными интегралами. Для большего понимания методов вычисления этих интегралов в пособии сформулирована в удобных для практических приложений формах теорема Фубини, подробно разобрана замена переменных (в том числе переход к полярным и обобщенным полярным координатам, к цилиндрическим и обобщенным цилиндрическим координатам, сферическим и обобщенным сферическим координатам).

В третьей части пособия подобраны задания для самостоятельной работы студентов, которые, естественно, можно использовать в качестве заданий контрольных работ для студентов заочной формы обучения (варианты таких работ прилагаются). Составной частью приведенных в пособии заданий являются задачи из сборников И. А. Виноградовой, С. Н. Олейника, В. А. Садовничего [1], Б. П. Демидовича [3], Л. Д. Кудрявцева [7], которые также рекомендуются авторами в качестве дополнительных источников примеров по теме „Кратные интегралы“.

1 Основные положения теории кратных интегралов

Тема 1 Определение интеграла Римана на брусе в $\mathbb{R}^n$

1.1 Брус в $\mathbb{R}^n$ и его мера

Определение 1.1 *Множество* $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,$ $k = 1, 2, \ldots, n\}$ *называется брусом в* $\mathbb{R}^n$*. Другими словами, брус в* $\mathbb{R}^n$ *есть декартово произведение* $I^n = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ брус I^2 является обычным прямоугольником со сторонами параллельными координатным осям. В пространстве $\mathbb{R}^3$ брус I^3 является параллелепипедом с гранями параллельными координатным плоскостям.

Замечание 1.1 В определении бруса можно брать вместо отрезков $[a_k,\, b_k]$ интервалы $(a_k,\, b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 1.2 *Число* $\mu(I^n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$ *называется мерой или объемом бруса* I^n.

В пространстве $\mathbb{R}^2$ мера $\mu(I^2)$ есть обычная площадь прямоугольника, а в пространстве $\mathbb{R}^3$ мера $\mu(I^3)$ — объем параллелепипеда.

1.2 Интегральная сумма и интеграл Римана

Определение 1.3 *Пусть задан брус* $I^n = \{x \in \mathbb{R}^n | a_k \leqslant x_k \leqslant b_k,\, k = 1, 2, \ldots, n\}$*. Разбиением бруса* I^n *называется семейство* $P = (P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(n)})$*, где* $P^{(k)} = \{x_k^{(0)}, x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(s_k)}\}$ *есть разбиение отрезка* $[a_k, b_k]$*, такое что* $a_k = x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(s_k)} = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Разбиение P бруса I^n порождает более мелкие брусы $I^n_{(j)}$ общим числом $N = s_1 \cdot s_2 \cdot \ldots \cdot s_N$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

В каждом брусе $I^n_{(j)}$ рассмотрим произвольную точку $\xi^{(j)} = (\xi_1^{(j)}, \xi_2^{(j)}, \ldots, \xi_n^{(j)}) \in I^n_{(j)}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$.

Определение 1.4 *Разбиение* P *бруса* I^n *вместе с выбранной системой точек* $\xi = (\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \ldots, \xi^{(N)})$ *называется разбиением с отмеченными точками и обозначается* $P(\xi)$.

Замечание 1.2 В $\mathbb{R}^2$ брусы $I^n_{(j)}$ будут обычными прямоугольниками. На рисунке 1 изображено разбиение бруса I^2 с отмеченными точками $\{(\xi_i, \eta_j), i = 1, 2, \ldots, s_1, j = 1, 2, \ldots, s_2\}$.

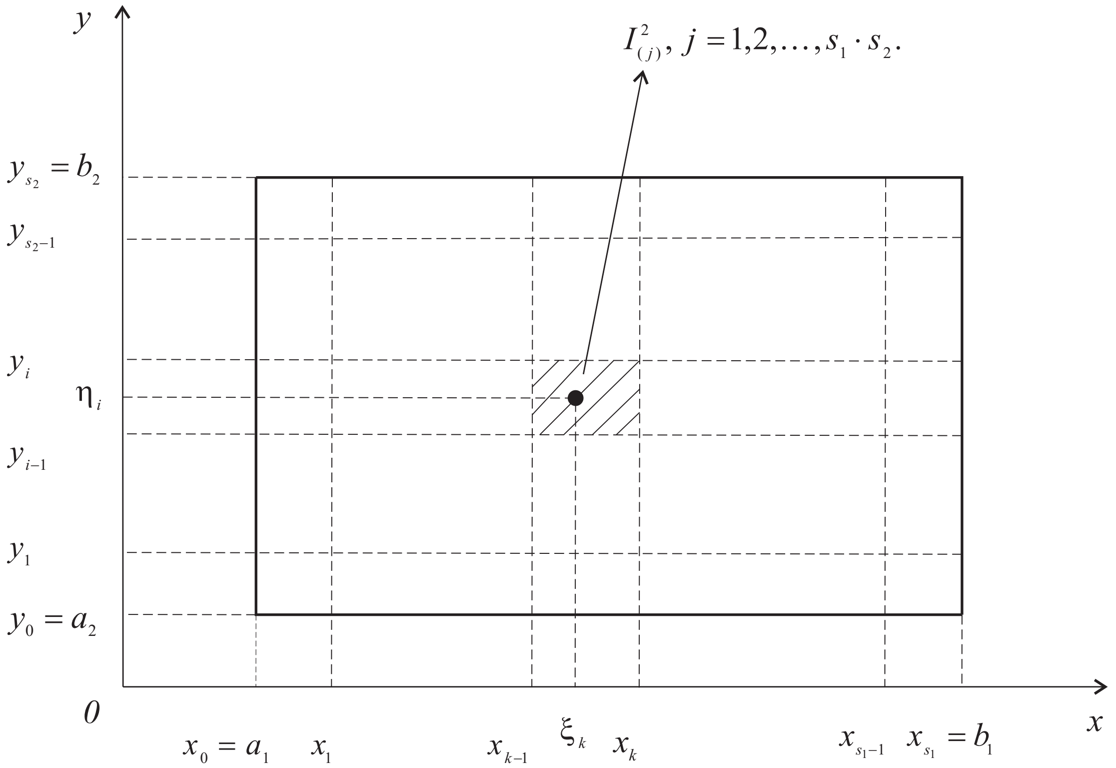

Рисунок 1 – Брус в $\mathbf{R}^2$ с разбиением P с отмеченными точками

Определение 1.5 *Диаметром $\lambda(P)$ разбиения P для бруса I^n называется число*

$$\lambda(P) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} d(I^n_{(j)}),$$

где $d(I^n_{(j)})$ — диаметр множества бруса $I^n_{(j)}$, $\quad d(I^n_{(j)}) = \max\limits_{x,y \in I^n_{(j)}} \rho(x, y)$, *а $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками x и $y \in I^n_{(j)}$.*

Пусть на брусе I^n задана функция $f : I^n \to \mathbb{R}$.

Определение 1.6 *Сумма*

$$\sigma(f; P(\xi)) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi^{(j)}) \mu(I^n_{(j)})$$

называется интегральной суммой Римана функции $f(x)$, соответствующей разбиению $P(\xi)$ бруса I^n.

Определение 1.7 *Число $\mathfrak{I} \in \mathbb{R}$ называется интегралом Римана от функции $f(x)$ на брусе I^n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$*

такое, что для любого разбиения P с диаметром $\lambda(P) < \delta$ и для любой системы отмеченных точек ξ выполняется неравенство

$$|\sigma(f; P(\xi)) - \mathfrak{I}| < \varepsilon.$$

Тот факт, что $\mathfrak{I}$ является интегралом от функции $f(x)$ на брусе I^n записывается как $\lim\limits_{\lambda(P)\to 0} \sigma(f; P(\xi)) = \mathfrak{I}$.

Интеграл от функции $f(x)$ на брусе I^n обозначается следующим образом:

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{I^n} f(x)\, dx = \iint\limits_{I^n}\!\dots\!\int f(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1\, dx_2\, \dots\, dx_n.$$

В пространстве $\mathbb{R}^2$ интеграл Римана называют двойным интегралом и обозначают $\iint\limits_{I^2} f(x,y)\, dx\, dy$, а в пространстве $\mathbb{R}^3$ — тройным интегралом и обозначают $\iiint\limits_{I^3} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$.

Если функция имеет интеграл Римана, то ее называют интегрируемой по Риману. Множество всех интегрируемых по Риману функций на брусе I^n обозначается $\Re(I^n)$.

Замечание 1.3 В $\mathbb{R}^2$ для функции $f(x,y)$ непрерывной на I^2, такой что $f(x,y) \geqslant 0$, интегральная сумма имеет вид

$$\sigma(f; P(\xi)) = \sum_{k=1}^{s_1} \sum_{i=1}^{s_2} f(\xi_k, \eta_i) \Delta x_k \Delta y_i.$$

Разбиение P с системой отмеченных точек $\{(\xi_i, \eta_j), i = 1, 2, \dots \dots, s_1, j = 1, 2, \dots, s_2\}$ построено в замечании 1.2.

С геометрической точки зрения эта интегральная сумма представляет сумму объемов параллелепипедов в $\mathbb{R}^3$, аппроксимирующих цилиндрическое тело (цилиндроид), ограниченное сверху поверхностью $z = f(x,y)$, $(x,y) \in I^2$, а снизу прямоугольником I^2, лежащим на плоскости $z = 0$. Поэтому интеграл Римана есть объем этого тела.

Теорема 1.1 *Для функции $f(x)$, определенной на брусе I^n, может существовать не более одного числа $\mathfrak{I}$ из определения интеграла Римана.*

Теорема 1.2 (необходимое условие интегрируемости функции по Риману) *Если $f \in \Re(I^n)$, то функция f ограничена на I^n.*

Замечание 1.4 Также как и при $n = 1$ из ограниченности функции f на брусе I^n, вообще говоря, не следует, что $f \in \Re(I^n)$.

Тема 2 Критерий Дарбу интегрируемости функции по Риману на брусе

2.1 Сумма Дарбу

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на брусе I^n и пусть P — любое разбиение этого бруса, а $I^n_{(j)} (j = 1, 2, \ldots, N)$ — брусы, порожденные разбиением P.

Для функции $f(x)$ определим числа

$$M_j = \sup_{x \in I^n_{(j)}} f(x),\ m_j = \inf_{x \in I^n_{(j)}} f(x),\ j = 1, 2, \ldots, N.$$

Определение 2.1 *Суммы*

$$S(f; P) = \sum_{j=1}^{N} M_j \mu(I^n_{(j)}),$$

$$s(f; P) = \sum_{j=1}^{N} m_j \mu(I^n_{(j)})$$

называются соответственно верхней и нижней суммами Дарбу функции $f(x)$, соответствующими разбиению P бруса I^n.

2.2 Свойства сумм Дарбу

Свойство 2.1 *Для любой системы отмеченных точек ξ разбиения P справедливы неравенства*

$$s(f; P) \leqslant \sigma(f; P(\xi)) \leqslant S(f; P).$$

Свойство 2.2 *Для разбиения P имеют место равенства*

$$S(f; P) = \sup_{\xi} \sigma(f; P(\xi)),$$

$$s(f; P) = \inf_{\xi} \sigma(f; P(\xi)).$$

Определение 2.2 *Пусть* $P = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ *и* $P' = (P_1', P_2', \ldots, P_n')$ *— два разбиения бруса* I^n. *Разбиение* P' *называется продолжением разбиения* P, *если каждое разбиение* P_k' *отрезка* $[a_k, b_k]$ *является продолжением разбиения* P_k *того же отрезка, т.е. все точки разбиения* P_k *входят в разбиение* P_k'.

Свойство 2.3 *Если* P' *— продолжение разбиения* P, *то*

$$s(f; P) \leqslant s(f; P') \leqslant S(f; P') \leqslant S(f; P).$$

Свойство 2.4 *Для любых разбиений* P' *и* P'' *имеет место неравенство*

$$s(f; P') \leqslant S(f; P'').$$

Следствие 2.1 *Существуют числа* $\underline{\mathfrak{I}} = \sup\limits_P s(f; P)$ *и* $\overline{\mathfrak{I}} = \inf\limits_P S(f; P)$, *называемые соответственно нижним и верхним интегралами Дарбу, причем*

$$s(f; P) \leqslant \underline{\mathfrak{I}} \leqslant \overline{\mathfrak{I}} \leqslant S(f; P).$$

2.3 Критерий Дарбу интегрируемости функции

Отмеченные выше свойства имеют место для любой ограниченной на брусе I^n функции. Большой интерес представляет тот случай, когда нижний интеграл Дарбу $\underline{\mathfrak{I}}$ равен верхнему интегралу $\overline{\mathfrak{I}}$.

Теорема 2.1 (критерий Дарбу интегрируемости функции) *Для того, чтобы ограниченная функция* $f(x)$, *определенная на брусе* I^n, *была интегрируемой на этом брусе, необходимо и достаточно, чтобы эта функция удовлетворяла условию: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для всех разбиений* P *бруса* I^n *с* $\lambda(P) < \delta$ *выполняется неравенство*

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

Следствие 2.2 *Если* $f(x) \in \Re(I^n)$, *то*

$$\mathfrak{I} = \overline{\mathfrak{I}} = \underline{\mathfrak{I}},$$

где $\mathfrak{I}$, $\overline{\mathfrak{I}}$, $\underline{\mathfrak{I}}$ *— соответственно интеграл Римана, верхний и нижний интегралы Дарбу функции* f *на брусе* I^n.

Тема 3 Критерий Лебега интегрируемости по Риману функции

3.1 Множества лебеговой меры нуль

Для описания классов интегрируемых по Риману функций основную роль играет понятие множества лебеговой меры нуль.

Определение 3.1 *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством лебеговой меры нуль (в дальнейшем множество меры нуль), если для любого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие множества E системой брусов ($I^n_{(k)}$, $k = \overline{1, \infty}$) такое, что*

$$1) E \subset \cup_{k=1}^{\infty} I^n_{(k)}, \quad 2) \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I^n_{(k)}) < \varepsilon,$$

где $\mu(I^n_{(k)})$ — объем бруса $I^n_{(k)}$.

Свойства множеств меры нуль

Свойство 3.1 *Любое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из конечного числа точек из $\mathbb{R}^n$, является множеством меры нуль.*

Свойство 3.2 *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

Свойство 3.3 *Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.*

Свойство 3.4 *Брус $I^n \subset \mathbb{R}^n$ с $a_k < b_k$ (для всех $k = \overline{1, n}$) не является множеством меры нуль.*

Свойство 3.5 *Открытое множество $E \subset \mathbb{R}^n$ не является множеством меры нуль (множество меры нуль не содержит внутренних точек).*

К примерам множеств меры нуль можно отнести множества, являющиеся графиками непрерывных функций.

Теорема 3.1 (о мере графика непрерывной функции) *Пусть $f : M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на множестве $M \subset \mathbb{R}^{n-1}$, тогда ее график в $\mathbb{R}^n$ есть множество меры нуль.*

В частности, верхняя полусфера $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ в $\mathbb{R}^3$ имеет меру нуль.

Используя свойства 1-3 множеств меры нуль строятся другие такие же множества. В качестве примера рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ сферу $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Учитывая то, что ее можно представить в виде объединения двух полусфер $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ и $z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, которые являются множествами меры нуль, и пользуясь свойством 3.2, получаем, что сфера в $\mathbb{R}^3$ есть множество меры нуль.

Еще одним источником множеств меры нуль является следующая теорема.

Теорема 3.2 (Сарда) *Пусть $1 \leqslant m < n$ и $G \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество. Пусть f — дифференцируемое отображение из G в $\mathbb{R}^n$, тогда образ $f(G)$ есть множество меры нуль $\mathbb{R}^n$.*

Из этой теоремы следует, например, что всякая гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ будет множеством меры нуль в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ соответственно.

3.2 Множества объема нуль

Наряду с понятием множества лебеговой меры нуль полезно ввести понятие объема нуль.

Определение 3.2 *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется множеством объема нуль (множеством жордановой меры нуль), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие множества E системой брусов $(I^n_{(k)},\ k = \overline{1, N})$ такое, что*

$$1) E \subset \cup_{k=1}^{N} I^n_{(k)}, \quad 2) \sum_{k=1}^{N} \mu(I^n_{(k)}) < \varepsilon,$$

где $\mu(I^n_{(k)})$ — объем бруса $I^n_{(k)}$.

Очевидно, что всякое множество объема нуль, есть множество меры нуль. Обратное утверждение неверно (об этом будет сказано позже в замечании 4.2).

Свойства множеств меры нуль

Свойство 3.6*Любое множество $E \subset \mathbb{R}^n$, состоящее из конечного числа точек из $\mathbb{R}^n$, является множеством объема нуль.*

Свойство 3.7 *Объединение конечного числа множеств объема нуль есть множество объема нуль.*

Свойство 3.8 *Подмножество множества объема нуль есть множество объема нуль.*

Свойство 3.9 *Брус $I^n \subset \mathbb{R}^n$ с $a_k < b_k$ (для всех $k = \overline{1, n}$) не является множеством объема нуль.*

Свойство 3.10 *Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ является множеством объема нуль, то множество E не содержит внутренних точек, т. е. внутренность $\overset{\circ}{E} = \emptyset$.*

Свойство 3.11 *Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ неограничено, то оно не может быть множеством объема нуль.*

Свойство 3.12 *Если множество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно и является множеством лебеговой меры нуль, то E — множество объема нуль.*

Свойство 3.13 *Если множество $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество и $c = const \in \mathbb{R}$, тогда $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n, c), (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1\}$ есть множество объема нуль в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Свойство 3.14 *Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на множестве $E \subset \mathbb{R}^{n-1}$, причем E компактно, тогда ее график в $\mathbb{R}^n$ есть множество объема нуль.*

3.3 Критерий Лебега интегрируемости функции

Теорема 3.3 (критерий Лебега интегрируемости по Риману функции) *Функция f, определенная на брусе $I^{(n)} \subset \mathbb{R}^n$ будет интегрируемой на этом брусе тогда и только тогда, когда она ограничена и множество точек разрыва функции f является множеством меры нуль.*

Замечание 3.1 Как следствие из критерия Лебега получается, что всякая непрерывная на брусе I^n функция будет интегрируемой по Риману.

Замечание 3.2 К интегрируемым функциям будут относиться и некоторые разрывные на брусе I^n функции, например, функции двух переменных, имеющие разрыв на одном из перечисленных ниже множеств:

1) множество, состоящее из конечного либо счетного числа точек;

2) множество, состоящее из конечного либо счетного числа гладких кривых в I^2;

3) множества, которые являются не более чем счетным объединением множеств из 1) и 2).

Совершенно аналогичное замечание будет иметь место и для функций трех переменных, только в пункте 2) вместо кривых из I^2 надо рассматривать непрерывные кривые и поверхности в I^3.

Тема 4 Интеграл функции по произвольному множеству

4.1 Измеримые множества

Определение 4.1 *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$. Характеристической функцией множества E называется функция, заданная равенством*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, \; x \in E \\ 0, \; x \notin E. \end{cases}$$

Функция χ_E имеет разрывы в граничных точках множества E. Напомним, что точка $x \in \mathbb{R}^n$ называется граничной точкой, если в любой ее окрестности есть точки как принадлежащие E, так и не принадлежащие E. Множество граничных точек обозначают ∂E. Заметим, что граница ∂E ограниченного множества является компактным множеством.

Определение 4.2 *Ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ называется измеримым в смысле Жордана (измеримым по Жордану), если существует и конечен интеграл*

$$\mu(E) = \int\limits_{E \subset I^n} \chi_E(x)\, dx,$$

где I^n — произвольный брус, содержащий множество E. Для измеримого множества E число $\mu(E)$ называют мерой Жордана или объемом множества E.

Поскольку множество точек разрыва функции χ_E совпадает с ∂E, то по критерию Лебега получаем, что ограниченное множество E будет измеримым по Жордану тогда и только тогда, когда граница ∂E будет множеством меры нуль. В связи с этим очень часто первоначально множество E называют измеримым по Жордану, если граница ∂E будет множеством меры нуль (в силу компактности ∂E и объема нуль).

Поясним геометрический смысл величины $\mu(E)$. Пусть P — произвольное разбиение бруса $I^n \supset E$. Нижняя сумма Дарбу $s(\chi_E, P)$ разбиения P функции χ_E равна сумме объемов брусов разбиения P, лежащих в E (это объем вписанного в E многогранника), а верхняя сумма $S(\chi_E, P)$ равна сумме объемов тех брусов разбиения P, которые имеют общие точки с множеством E (это объем описанного многогранника). В силу того, что для измеримого по Жордану множества по следствию 2.2 критерия Дарбу интегрируемости

$$\mu(E) = \int\limits_{E \subset I^n} \chi_E(x)\, dx = \underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}},$$

где $\underline{\mathfrak{I}}$ и $\overline{\mathfrak{I}}$ есть нижний и верхний интегралы Дарбу функции $\chi_E(x)$, мы можем считать, что $\mu(E)$ есть общий предел при $\lambda(P) \to 0$ объемов вписанных в E и описанных около E многогранников, что совпадает с принятым представлением об объеме простых тел в $\mathbb{R}^3$.

В [5,6] определение измеримости по Жордану множества строится именно по отмеченным выше свойствам $s(\chi_E, P)$ и $S(\chi_E, P)$.

Замечание 4.1 Мы рассмотрели три понятия: множество меры нуль, множество объема нуль и измеримое по Жордану множество с $\mu(E) = 0$. Оказывается, что понятие множества объема нуль и понятие измеримого по Жордану множества с $\mu(E) = 0$ эквивалентны: ограниченное множество $E \subset \mathbb{R}^n$ будет множеством объема нуль тогда и только тогда, когда $\mu(E) = 0$. Ранее мы уже отметили, что всякое множество E объема нуль является множеством меры нуль, а обратное, вообще говоря, неверно, но множество меры нуль будет множеством объема нуль при дополнительном предположении, что E — измеримое множество.

Замечание 4.2 Из того, что E — множество меры нуль еще не следует, что оно измеримо по Жордану (даже, если E ограничено). Например, множество $E = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ограничено и является множеством меры нуль, но тем не менее $\partial E = [0, 1]$, для которого $\mu(\partial E) \neq 0$, т. е. E неизмеримо по Жордану. Эти рассуждения показывают, что множество рациональных точек E не является множеством объема нуль.

Замечание 4.3 Очевидно, что любой брус $I^n \subset \mathbb{R}^n$ является измеримым по Жордану, и объем бруса, определенный в определении 1.2, совпадает с объемом из определения 4.2.

Для изучения свойств измеримых по Жордану множеств используется следующее утверждение.

Теорема 4.1 *Для любых множеств E_1, $E_2 \subset \mathbb{R}^n$ справедливы следующие свойства:*

$$1)\, \partial(E_1 \cup E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2;$$

$$2)\, \partial(E_1 \cap E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2;$$

$$3)\, \partial(E_1 \setminus E_2) \subset \partial E_1 \cup \partial E_2.$$

Свойства измеримых по Жордану множеств

Свойство 4.1 *Объединение конечного числа измеримых по Жордану множеств является измеримым по Жордану множеством.*

Свойство 4.2 *Пересечение конечного числа измеримых по Жордану множеств является измеримым по Жордану множеством.*

Свойство 4.3 *Разность измеримых по Жордану множеств является измеримым по Жордану множеством.*

Свойство 4.4 *Пусть $E_1 \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое измеримое по Жордану множество в $\mathbb{R}^n$ и функции $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ непрерывны на E_1, и $\varphi_1(x) \leqslant \leqslant \varphi_2(x)$. Тогда множество $E = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}), \mid \varphi_1(x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n) \leqslant x_{n+1} \leqslant \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ является измеримым по Жордану в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Свойство 4.5 *Если E — измеримое по Жордану множество, то замыкание $\overline{E}$ и внутренность $\overset{\circ}{E}$ (множество внутренних точек) также являются измеримыми по Жордану множествами, при этом объемы множеств E, $\overline{E}$ и $\overset{\circ}{E}$ совпадают, т. е.*

$$\mu(E) = \mu(\overline{E}) = \mu(\overset{\circ}{E}).$$

4.2 Интеграл Римана на ограниченном множестве

Пусть функция f определена на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^n$. Будем считать, что функция

$$f\chi_E(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Определение 4.3 *Интегралом Римана от функции f по множеству E называется число*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{E \subset I^n} f\chi_E(x)\,dx,$$

где I^n — произвольный брус, содержащий множество E.

Если стоящий в правой части равенства интеграл не существует, то говорят, что f неинтегрируема по Риману на множестве E. В противном случае f называется интегрируемой по Риману на множестве E. Доказывается, что существование и величина правой часть определения интеграла не зависит от выбора бруса I^n.

Заметим, что в определении интеграла множество E ограничено, хотя чаще всего мы будем рассматривать измеримые по Жордану множества.

Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{рациональное}, \\ 1, & x - \text{иррациональное}. \end{cases}$$

Множество $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, тогда

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{рациональное}, \\ 0, & x - \text{иррациональное}. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $f(x)$ неинтегрируема на $[0,1]$, и множество E неизмеримо по Жордану, но

$$(f \cdot \chi_E)(x) = 0 \quad \text{для всех } x \in [0,1],$$

поэтому $(f \cdot \chi_E)(x)$ интегрируема на $[0,1]$ и $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$.

Этот пример показывает, что если даже функция f ограничена на I^n и интегрируема на ограниченном множестве $E \subset I^n$, из этого еще не следует интегрируемость f на I^n и измеримость по Жордану множества E.

Совокупность всех интегрируемых на измеримом по Жордану множестве E функций обозначается символом $\Re(E)$.

В силу того, что функция $f\chi_E$ по сравнению с функцией f может иметь дополнительные точки разрыва лишь на границе ∂E множества E, которая для измеримого по Жордану множества является множеством меры нуль, получаем критерий Лебега интегрируемости функции на измеримом по Жордану множестве.

Теорема 4.2 *Функция f, определенная на измеримом по Жордану множестве, будет интегрируемой тогда и только тогда, когда она ограничена и непрерывна на E, за исключением множества меры нуль.*

4.3 Свойства интеграла Римана

Для интеграла Римана на измеримом по Жордану множестве E имеют место обычные свойства определенного интеграла на отрезке. В дальнейшем будем считать множество E измеримым по Жордану.

Свойство 4.6 (линейность интеграла Римана) *Пусть функции $f_j \in \Re(E)$, c_j — постоянные $(j = 1, 2, \ldots, m)$, тогда функция $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j f_j \in \Re(E)$ и*

$$\int\limits_E \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} c_j \int\limits_E f_j(x)\,dx.$$

Замечание 4.4 Это свойство будет справедливо и в случае, когда множество E ограниченное.

Свойство 4.7 *Если функции f, $g \in \Re(E)$, то $f \cdot g \in \Re(E)$.*

Свойство 4.8 *Если E_1, E_2 — измеримые по Жордану множества такие, что $E_1 \subset E_2$, и $f \in \Re(E_2)$, то $f \in \Re(E_1)$.*

Свойство 4.9 *Пусть* E_j *— измеримые по Жордану в* $\mathbb{R}^n$ *множества, и функция* $f \in \Re(E_j)$, $(1, 2, \ldots, m)$, $\mu(E_j \cap E_k) = 0$ *для всех* $j \neq k$, *тогда функция* $f \in \Re(E)$,*где* $E = \cup_{j=1}^m E_j$, *причем*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \sum_{j=1}^m \int\limits_{E_j} f(x)\,dx.$$

Свойство 4.10 (неотрицательность интеграла) *Если функция* $f \in \Re(E)$, *и* $f(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in E$, *то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant 0.$$

Следствие 4.1 (интегрирование неравенств) *Если функции* $f, g \in \Re(E)$, *и для любого* $x \in E$ $f(x) \geqslant g(x)$, *то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Следствие 4.2 *Если функция* $f \in \Re(E)$, *и* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *для всех* $x \in E$, *то*

$$m\mu(E) \leqslant \int\limits_E f(x)\,dx \leqslant M\mu(E).$$

Следствие 4.3 *Если функция* $f \in \Re(E)$, *и* $m = \inf\limits_{x\in E} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in E} f(x)$, *то существует число* $\theta \in [m, M]$, *что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \theta\mu(E).$$

Следствие 4.4 *Если* E *— связное измеримое по Жордану множество, и* f *непрерывна на* E, *то найдется точка* $\xi \in E$ *такая, что*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = f(\xi)\mu(E).$$

Следствие 4.5 (теорема о среднем для интеграла) *Если в дополнении к условиям следствия 4.2 имеется функция* $g \in \Re(E)$, *причем* $g(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in E$, *то*

$$m\int\limits_E g(x)\,dx \leqslant \int\limits_E f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int\limits_E g(x)\,dx.$$

Следствие 4.6 (монотонность меры) *Пусть* E_1 *и* E_2 *— измери-*

мые по Жордану множества и $E_1 \subset E_2$, тогда

$$\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2).$$

Свойство 4.11 (об интегрируемости модуля функции) *Если функция $f \in \Re(E)$, то $|f| \in \Re(E)$, причем*

$$|\int\limits_E f(x)\,dx| \leqslant \int\limits_E |f(x)|\,dx.$$

Замечание 4.5 Из того, что $|f| \in \Re(E)$ не следует, что $f \in \Re(E)$.

Рассмотрим пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x - \text{рациональное}, \\ 1, & x - \text{иррациональное}, \end{cases}$$

тогда $|f| = 1 \in \Re[0,1]$, но $f \notin \Re[0,1]$.

Следствие 4.7 *Пусть функция $f \in \Re(E)$, и $|f(x)| \leqslant L$ для любого $x \in E$, тогда*

$$|\int\limits_E f(x)\,dx| \leqslant L\mu(E).$$

Следствие 4.8 *Пусть $\mu(E) = 0$, и f ограничена на E, тогда $f \in \Re(E)$ и $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$.*

Следствие 4.9 *Пусть функция $f \in \Re(E)$, и g ограничена на E, причем $f(x) = g(x)$ для любого $x \in E \setminus E_1$, где $E_1 \subset E$ — измеримое по Жордану и $\mu(E_1) = 0$, тогда $g \in \Re(E)$*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Замечание 4.6 Отметим, что здесь является важным тот факт, что E_1 — измеримое по Жордану множество объема нуль. Рассмотрим следующий пример. Пусть $f(x) = 1$ для всех $x \in [0,1]$, тогда $f \in \Re([0,1])$ и $\int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx = 1$. Функция

$$g(x) = \begin{cases} 0, x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] = E_1, \\ 1, x \notin E_1, \end{cases}$$

очевидно ограничена, и $f(x) = g(x)$ для всех $x \in [0,1] \setminus E_1$, где E_1 — множество меры нуль, но не объема нуль. Функция g неинтегрируема на отрезке $[0,1]$. Таким образом, интегрируемую на E функцию можно изменить на множестве меры нуль так, что она станет неинтегрируемой по Риману, оставаясь при этом ограниченной.

Свойство 4.12 *Если функция* $f \in \Re(E)$, *причем* $f(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in E$ *и* $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$, *то* $\mu(E_1) = 0$, *где* $E_1 = \{x \in E |\, f(x) > 0\}$.

Свойство 4.13 *Пусть функция* $f \in \Re(E)$ *и* $E_1 = \{x \in E |\, f(x) \neq 0\}$ *— множество меры нуль, то* $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$.

Следствие 4.10 *Если функции* $f, g \in \Re(E)$ *и* $E_1 = \{x \in E |\, f(x) \neq$ $\neq g(x)\}$ *— множество меры нуль, то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E g(x)\,dx.$$

Свойство 4.14 *Пусть* E *— измеримое множество,* $\overline{E}$ *— замыкание множества* E, $\overset{\circ}{E}$ *— его внутренность, т. е. множество внутренних точек* E, *тогда функция* f *интегрируема или неинтегрируема одновременно на всех трех множествах* E, $\overline{E}$ *и* $\overset{\circ}{E}$, *и в случае интегрируемости функции* f *интегралы на этих множествах совпадают, т. е.*

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_{\overline{E}} f(x)\,dx = \int\limits_{\overset{\circ}{E}} f(x)\,dx.$$

Тема 5 Сведение кратных интегралов к повторным

В предыдущих темах были рассмотрены только условия существования кратных интегралов и их общие свойства. Ниже рассмотрим теорему Фубини, которая является важным методом для вычисления кратных интегралов. Теорема сформулирована в самом общем виде и сопровождается замечаниями, относящимися к различным специальным случаям, когда возможна более простая формулировка.

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, а брусы I^n, I^m,$I^n \times I^m$ заданы соответственно в $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{n+m}$.

Теорема 5.1 (Фубини) *Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на брусе $I^n \times I^m$ и пусть далее функция g_x определена для каждого $x \in I^n$ равенством $g_x(y) = f(x, y)$ и*

$$L(x) = \underline{\int\limits_{I^m}} g_x(y)\, dy = \underline{\int\limits_{I^m}} f(x, y)\, dy$$

— нижний интеграл Дарбу функции $g_x(y)$ на I^m, а

$$U(x) = \overline{\int\limits_{I^m}} g_x(y)\, dy = \overline{\int\limits_{I^m}} f(x, y)\, dy$$

— верхний интеграл Дарбу функции $g_x(y)$ на I^m, тогда функции $L(x)$ и $U(x)$ интегрируемы на I^n и

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{I^n} L(x)\, dx = \int\limits_{I^n} dx \underline{\int\limits_{I^m}} f(x, y)\, dy;$$

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{I^n} U(x)\, dx = \int\limits_{I^n} dx \overline{\int\limits_{I^m}} f(x, y)\, dy.$$

Замечание 5.1 Интегралы, стоящие в правых частях последних равенств, называются повторными.

Замечание 5.2 В предположении, что $f \in \Re(I^n \times I^m)$, аналогично имеет место равенство

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_{I^m} dy \overline{\int\limits_{I^n}} f(x, y)\, dx = \int\limits_{I^m} dy \underline{\int\limits_{I^n}} f(x, y)\, dx.$$

Эти интегралы называются повторными интегралами для функции $f(x, y)$, взятыми в обратном порядке по сравнению с порядком, выбранным в теореме.

Замечание 5.3 На практике часто встречается случай, когда функция g_x интегрируема для всех $x \in I^n$, например, если f непрерывна на $I^n \times I^m$. В этом случае

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{I^n} dx \int\limits_{I^m} f(x,y)\,dy,$$

и при аналогичных предположениях

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{I^m} dy \int\limits_{I^n} f(x,y)\,dx.$$

Замечание 5.4 Из теоремы Фубини следует, что если $f \in \Re(I^n \times I^m)$, тогда имеет место равенство кратных и повторных интегралов. Из существования повторных интегралов, вообще говоря, не следует существование кратного интеграла. В качестве примера [8] рассмотрим функцию $f(x,y)$, заданную на $I^2 = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ формулой

$$f(x,y) = \begin{cases} y^{-2}, & \text{если } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{если } 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{в остальных точках} (x,y) \in I^2. \end{cases}$$

Пусть $y \in (0,1)$, тогда

$$\int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = \int\limits_0^y \frac{dx}{y^2} - \int\limits_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1$$

и

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = \int\limits_0^1 dy = 1.$$

Аналогично для $x \in (0,1)$, тогда

$$\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = -\int\limits_0^x \frac{dy}{x^2} + \int\limits_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1$$

и

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 (-1)\,dx = -1.$$

Тем не менее $f(x,y)$ неинтегрируема на $[0,1] \times [0,1]$, так как она неограничена на этом множестве (неинтегрируемость $f(x,y)$ следует и из теоремы Фубини, ибо в противном случае должны быть равны повторные интегралы).

Замечание 5.5 Самое худшее, с чем обычно сталкиваются на практике, это неинтегрируемость g_x для конечного числа точек $x \in I^n$. В этом случае

$$L(x) = \int\limits_{I^m} f(x,y)\,dy$$

определена для всех значений x, кроме этого конечного множества. Так как $\int\limits_{I^n} L(x)\,dx$ не изменится, если L переопределить в конечном числе точек, то можно записать

$$\int\limits_{I^n \times I^m} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{I^n} dx \int\limits_{I^m} f(x,y)\,dy,$$

считая, что интегралу $\int\limits_{I^m} f(x,y)\,dy$, когда он не существует, придано произвольное значение, допустим 0.

Сказанное выше будет иметь место, если g_x неинтегрируема на множестве объема нуль.

Замечание 5.6 Существуют примеры, когда интегралу $L(x) = \int\limits_{I^m} f(x,y)\,dy$ в тех точках x, где он не существует, нельзя придавать произвольное значение. Например, если указанный интеграл не существует даже на множестве лебеговой меры нуль. В этом случае теоремой Фубини приходится пользоваться в том виде, в котором она сформулирована.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, определенную на брусе (квадрате) $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ формулой

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально и } y \text{ любое,} \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально и } y \text{ иррационально,} \\ 1 - \dfrac{1}{q}, & \text{если } x, y \text{ рациональные, } x = \dfrac{p}{q} - \text{несократимая дробь.} \end{cases}$$

Функция $f(x,y)$ непрерывна на множестве $I^2 \setminus E$, где $E = \{(x,y) \in I^2 | x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ и является множеством лебеговой меры нуль. Очевидно, что f ограничена на I^2, и по критерию Лебега интегрируемости функция $f \in \Re(I^2)$. Так как $f(x,y) = 1$ на $I^2 \setminus E$, то по следствию 4.10

$$\iint\limits_{I^2} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{I^2} 1\,dxdy = 1.$$

Интеграл $\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ \text{не существует}, & \text{если } x \text{ рационально}. \end{cases}$

Поэтому, если интеграл $h(x) = \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$ положить равным нулю, когда он не существует, то $h(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ рационально}, \end{cases}$ будет неинтегрируемой функцией и

$$\iint\limits_{I^2} f(x,y)\,dxdy \neq \int\limits_0^1 h(x)\,dx.$$

С другой стороны, если воспользоваться теоремой Фубини в сформулированном выше виде, то, как легко видеть,

$$\overline{\int\limits_{[0,1]}} f(x,y)\,dy = 1$$

для всех $x \in [0,1]$ и поэтому

$$\iint\limits_{I^2} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{[0,1]} dx \int\limits_{[0,1]} f(x,y)\,dy = \int\limits_{[0,1]} 1\,dx = 1.$$

Замечание 5.7 Если $f \in \Re(I^n)$ и функция $f(x)$ достаточно „хорошая", например, непрерывна на I^n, то повторное применение теоремы Фубини дает равенство

$$\int\limits_{I^n} f(x)\,dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} dx_2 \ldots \int\limits_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_n.$$

Замечание 5.8 Теорему Фубини можно использовать и для вычисления интегралов по измеримому в смысле Жордана множеству D, которое не является брусом. В этих случаях следует выбрать брус $I^n \times I^m$, содержащий множество D, и вычислить интеграл от функции $f\chi_D$ по брусу $I^n \times I^m$. Пусть, например,

$$D = [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{[-1,1]\times[-1,1]} \int f\chi_D(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{1} f\chi_D(x,y)\,dy.$$

Поскольку

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } -1 \leqslant y \leqslant -\sqrt{1-x^2} \text{ или } \sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, \text{ во всех остальных точках,} \end{cases}$$

то

$$\int\limits_{-1}^{1} f\chi_D(x,y)\,dy = \int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)\,dy.$$

Замечание 5.9 Ниже будут приведены другие формулировки теоремы Фубини в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, облегчающие переход от двойных и тройных интегралов к повторным.

Тема 6 Замена переменных в кратном интеграле

6.1 Диффеоморфизмы областей

В формулах замены переменных в кратном интеграле большую роль играют специальные отображения — диффеоморфизмы.

Пусть заданы множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ и $D_x \subset \mathbb{R}^n$, точки из D_t будем обозначать $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, а точки из D_x будем обозначать $x = (x_1, x_2, \ldots \ldots, x_n)$. Если отображение $\varphi : D_t \to D_x$ задается системой функций $x_j = \varphi_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, где φ_j — дифференцируемы в D_t, то через $\det \varphi'(t)$ обозначим якобиан отображения

$$\det \varphi'(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_n} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial t_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_n} \end{vmatrix}.$$

Определение 6.1 *Отображение $\varphi : D_t \to D_x$ открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$ называется диффеоморфизмом множеств D_t и D_x, если выполняются следующие условия:*

1) φ — непрерывно-дифференцируемое отображение на D_t, т. е., если координатные функции φ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка на множестве D_t;

2) φ — биекция множества D_t на множество D_x;

3) φ^{-1} — непрерывно-дифференцируемое отображение на D_x.

Свойства диффеоморфизмов

Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм открытого множества $D_t \subset \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$, тогда имеют место следующие свойства.

Свойство 6.1 *Внутренние точки множества D_t отображаются во внутренние точки множества D_x, граница ∂D_t множества D_t переходит в границу ∂D_x множества D_x.*

Свойство 6.2 *Если $E_t \subset D_t$ — множество лебеговой меры нуль, то его образ $\varphi(E_t) \subset D_x$ также является множеством меры нуль.*

Свойство 6.3 *Если множество $E_t \subset D_t$, содержащееся в D_t вместе со своим замыканием $\overline{E_t}$, имеет объем нуль, то его образ $\varphi(E_t) = E_x$ содержится в D_x вместе со своим замыканием $\overline{E}_x$ и имеет объем равный нулю.*

Свойство 6.4 *Если измеримое по Жордану множество E_t содержится в области D_t вместе со своим замыканием $\overline{E_t}$, то его образ $E_x = \varphi(E_t)$ является измеримым по Жордану множеством, и $\overline{E_x} \subset D_x$.*

Замечание 6.1 Если $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм, то якобиан этого отображения отличен от нуля в любой точке $t \in D_t$. Это следует из тождества $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$, дифференцируя которое, получаем $[(\varphi^{-1})'(\varphi(t))] \cdot [\varphi'(t)] = E$, где E — единичная матрица.

6.2 Замена переменных в кратном интеграле

Теорема о замене переменных в кратном интеграле доказывается для одного специального класса функций.

Определение 6.2 *Носителем функции $f : D_x \to \mathbb{R}$, заданной в области $D_x \subset \mathbb{R}^n$ называется замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек области D_x, где $f(x) \neq 0$. Носитель f обозначается $supp\, f$. Таким образом,*

$$supp\, f = \overline{\{x \in D_x | f(x) \neq 0\}}.$$

Теорема о замене переменных будет сформулирована для интегрируемой функции $f : D_x \to \mathbb{R}$, равной нулю в окрестности границы области D_x, точнее, когда носитель f является лежащим в D_x компактом $\mathcal{K}_x$ (такие функции называют финитными в D_x). Интегралы от f по D_x и по $\mathcal{K}_x$, если они существуют, очевидно, совпадают, поскольку вне $\mathcal{K}_x$ функция f равна нулю. С точки зрения отображений это условие равносильно тому, что замена $x = \varphi(t)$ действует не только на множество $\mathcal{K}_x$, по которому в сущности и надо интегрировать, но и в некоторой окрестности D_x этого множества.

Теорема 6.1 (о замене переменных в кратном интеграле) *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм открытого ограниченного множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x = \varphi(D_t)$. Если $f : D_x \to \mathbb{R}$ интегрируемая на D_x функция, такая что носитель $\mathcal{K}_x$ является компактом, содержащимся в D_x, то функция $(f \circ \varphi) \cdot |det\, \varphi'|$ интегрируема по множеству D_t и справедлива формула*

$$\int\limits_{D_x = \varphi(D_t)} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t = \varphi^{-1}(D_x)} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det \varphi'(t)|\, dt.$$

Из этой теоремы получаем ряд полезных следствий.

Следствие 6.1 (замена переменных при отображениях измеримых по Жордану множеств) *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфизм открытого ограниченного множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$, а E_t, E_x — подмножества D_t и D_x соответственно, причем $\overline{E}_t \subset D_t$, $\overline{E}_x \subset D_x$ и $E_x = \varphi(E_t)$. Если $f \in \Re(E_x)$, то $(f \circ \varphi) \cdot |det\,\varphi^{'}| \in \Re(E_t)$ и имеет место равенство*

$$\int\limits_{E_x} f(x)\,dx = \int\limits_{E_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det\,\varphi^{'}(t)|\,dt.$$

Пусть G и $G^* = \varphi(G)$ — открытые множества из $\mathbb{R}^n$, и отображение $\varphi : G \to G^*$ является диффеоморфизмом. Возьмем произвольную точку $t^0 \in G$, и рассмотрим брус $I^n_\delta(t^0)$ такой, что $t^0 \in I^n_\delta(t^0) \subset G$, и все длины ребер $b_k - a_k = \delta$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Учитывая то, что функция $\det\,\varphi^{'}(t)$ непрерывна в точке t^0 и $\det\,\varphi^{'}(t^0) \neq 0$, по следствию 4.4 объем

$$\mu\left(\varphi\left(I^n_\delta(t^0)\right)\right) = \int\limits_{\varphi(I^n_\delta(t^0))} 1\,dx = \int\limits_{I^n_\delta(t^0)} |\det\,\varphi^{'}(t)|\,dt =$$

$$= |\det\,\varphi^{'}(\xi)|\mu\left(I^n_\delta(t^0)\right),$$

где $\xi \in I^n_\delta(t^0)$, откуда

$$|\det\,\varphi^{'}(\xi)| = \frac{\mu\left(\varphi\left(I^n_\delta(t^0)\right)\right)}{\mu\left(I^n_\delta(t^0)\right)},$$

и переходя к пределу при $\delta \to 0$, окончательно получаем следующее следствие.

Следствие 6.2 (геометрический смысл якобиана)

$$|\det\,\varphi^{'}(t^0)| = \lim_{\delta \to 0} \frac{\mu\left(\varphi\left(I^n_\delta(t^0)\right)\right)}{\mu\left(I^n_\delta(t^0)\right)}.$$

Следствие 6.3 (об инвариантности интеграла Римана относительно движения в $\mathbb{R}^n$) *Пусть G — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, измеримое по Жордану, а отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является движением (т.е. композицией сдвига и линейного ортогонального преобразования). Если $f \in \Re(\varphi(G))$, то $(f \circ \varphi) \in \Re(G)$ и*

$$\int\limits_{\varphi(G)} f(x)\,dx = \int\limits_{G} (f \circ \varphi)(t)\,dt.$$

В частности, величина интеграла от функции f по измеримому по Жордану открытому множеству D_x не зависит от выбора декартовых координат в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 6.4 (об инвариантности меры Жордана относительно движения) *Пусть D_t — измеримое по Жордану, а отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ является движением, тогда множество $D_x = \varphi(D_t) \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Жордану, и мера $\mu(D_x) = \mu(D_t)$.*

Замечание 6.2 Используемые на практике замены переменных иногда имеют те или иные особенности. Например, где-то может быть нарушение взаимной однозначности, обращения в нуль якобиана или отсутствие дифференцируемости. Как правило, эти особенности бывают на множествах меры нуль, и поэтому в таких случаях полезна следующая теорема.

Теорема 6.2 *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — отображение измеримого по Жордану множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x = \varphi(D_t)$. Если в D_t и D_x существуют множества S_t и S_x лебеговой меры нуль, такие что $D_t \setminus S_t$ и $D_x \setminus S_x$ — открытые множества, и φ отображает диффеоморфно $D_t \setminus S_t$ на $D_x \setminus S_x$ с ограниченным якобианом, то для любой функции $f \in \Re(D_x)$ $(f \circ \varphi) \cdot |det\, \varphi'| \in \Re(D_t \setminus S_t)$ и имеет место равенство:*

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t \setminus S_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det\, \varphi'(t)|\, dt.$$

Если, кроме того, величина $|det\, \varphi'|$ определена и ограничена на D_t, то

$$\int\limits_{D_x} f(x)\, dx = \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\det\, \varphi'(t)|\, dt.$$

Замечание 6.3 Использование приведенных выше теорем для двойных и тройных интегралов будет приведено ниже при рассмотрении конкретных примеров (например, переход к полярным, обобщенным полярным, сферическим, обобщенным сферическим, цилиндрическим и обобщенным цилиндрическим координатам).

Тема 7 Несобственные кратные интегралы

До сих пор изучались интегралы Римана для функций $f : D \subset \mathbb{R}^n \to$ $\to \mathbb{R}$, где D — измеримое по Жордану множество, которое в обязательном порядке должно быть ограниченным. Если f интегрируема на D, то в силу необходимого условия интегрируемости следует ограниченность этой функции на множестве D. Дальше обобщим понятие интеграла Римана на неограниченные области $D \subset \mathbb{R}^n$ и на неограниченные функции f на D.

7.1 Определение несобственного интеграла

Определение 7.1 *Исчерпанием множества $E \subset \mathbb{R}^n$ называется последовательность измеримых по Жордану множеств $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$, $E_m \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $E_m \subset E_{m+1} \subset E$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\cup_{m=1}^{\infty} E_m = E$.*

Определение 7.2 *Пусть $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ — исчерпание множества E, а функция f определена на E и интегрируема на E_m. Если существует $\lim\limits_{m\to\infty} \int\limits_{E_m} f(x)\,dx$, не зависящий от выбора исчерпания $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$, то величина этого предела обозначается символом $\int\limits_{E} f(x)\,dx$ и называется несобственным интегралом от функции f по множеству E. В этом случае говорят, что интеграл $\int\limits_{E} f(x)\,dx$ сходится в несобственном смысле, а функция f называется интегрируемой в несобственном смысле. Если же такого конечного общего для всех указанных исчерпаний предела не существует, то говорят, что интеграл от функции f по множеству E расходится, а функция f неинтегрируема в несобственном смысле.*

Замечание 7.1 Если $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ исчерпание множества E и $f \in \Re(E_m)$ для всех $m = 1, 2, \ldots$, то по критерию Лебега интегрируемости функции множество M_m точек разрыва функции f на E_m является множеством лебеговой меры нуль. Так как $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, то множество точек разрыва функции f на E есть $M = \cup_{m=1}^{\infty} M_m$, которое также есть множество меры нуль.

Из сказанного выше следует, что неинтегрируемость по Риману функции f на D может быть обусловлена только двумя причинами: или множество E неизмеримо по Жордану, в частности, неограничено, или f неограничена на E. Эти особенности могут иметь место одновременно.

Замечание 7.2 Если E — измеримое по Жордану множество и

$f \in \Re(E)$, то функция f интегрируема в несобственном смысле и интеграл Римана и несобственный интеграл совпадают. Таким образом, понятие несобственного интеграла является обобщением понятия интеграла Римана.

Множество функций, интегрируемых на E в несобственном смысле, обозначают $\overline{\Re}(E)$. Из сказанного выше следует, что $\Re(E) \subset \overline{\Re}(E)$, если E —измеримое по Жордану множество.

Замечание 7.3 Совокупность всех исчерпаний множества E в определении 7.2 практически необозримо. Оказывается, что можно и не рассматривать все исчерпания, так как справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1 *Если f определена на E и неотрицательна на этом множестве, и хотя бы для одного исчерпания $\{E_m\}_{m=1}^{\infty}$ множества E указанный в определении 7.2 предел существует, то несобственный интеграл от функции f по множеству E сходится и равен этому пределу.*

Эта теорема используется чаще всего для вычисления несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Замечание 7.4 Для сходящихся несобственных интегралов имеют место свойства линейности, аддитивности по множествам, сохранения знака неравенств при интегрировании и т. д.

7.2 Сходимость несобственного интеграла

Приведем один признак сходимости несобственного интеграла.

Теорема 7.2 (можарантный признак сходимости несобственного интеграла) *Пусть функции f и g определены на множестве E и интегрируемы на одних и тех же его измеримых по Жордану подмножествах, причем $|f(x)| \leqslant g(x)$ на E. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int\limits_E g(x)\,dx$ следует сходимость интегралов $\int\limits_E |f(x)|\,dx$ и $\int\limits_E f(x)\,dx$.*

Замечание 7.5 Сравнивая определение кратного $n \geqslant 2$ и одномерного несобственного интегралов, видим, что в одномерном случае берутся в качестве множества E только промежутки, и исчерпание E производится только промежутками. Это связано с тем, что на прямой только ограниченные промежутки являются ограниченными связными множествами и тем самым естественно выделяются из остальных измеримых по Жордану множеств. Выделение более узкого класса исчерпаний приводит в одномерном случае к более широкому классу функций, интегрируемых в несобственном смысле, а именно появляется понятие условно сходящегося интеграла. Для кратного $n \geqslant 2$ интеграла совершенно иная ситуация — понятие условной сходимости отсутствует.

Теорема 7.3 *Если для функции $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ сходится интеграл $\int\limits_E f(x)\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_E |f(x)|\,dx$.*

Поскольку теорема 7.3 гарантирует абсолютную сходимость сходящегося несобственного кратного интеграла ($n \geqslant 2$), то в этом случае понятие сходимости и абсолютной сходимости несобственных кратных интегралов совпадают. Поэтому для исследования на сходимость интеграла $\int\limits_E f(x)\,dx$ можно воспользоваться теоремой 7.1 для неотрицательной функции f, либо можарантным признаком 7.2, либо попытаться вычислить интеграл, используя следующие теоремы.

Теорема 7.4 (о замене переменных в несобственном кратном интеграле) *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфное отображение открытого множества $D_t \subset \mathbb{R}^n$ на такое же множество $D_x \subset \mathbb{R}^n$, а функция f, заданная на D_x, интегрируема на измеримых по Жордану компактных подмножествах множества D_x. Если несобственный интеграл $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ сходится, то и интеграл $\int\limits_{D_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |det\,\varphi'(t)|\,dt$ сходится, и их значения совпадают.*

Также, как и в интеграле Римана, используемые на практике замены переменных иногда имеют те или иные особенности, которые отмечены в замечании 6.2. В этих случаях можно пользоваться теоремой.

Теорема 7.5 *Пусть $\varphi : D_t \to D_x$ — диффеоморфное отображение открытых множеств D_t и D_x. Предположим, что в D_t и D_x существуют множества S_t и S_x лебеговой меры нуль, что $\varphi : D_t \setminus S_t \to$ $\to D_x \setminus S_x$ — диффеоморфизм. Если несобственный интеграл $\int\limits_{D_x} f(x)\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{D_t \setminus S_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |det\,\varphi'(t)|\,dt$, и их значения совпадают.*

Если к тому же величина $|det\,\varphi'|$ определена и ограничена на компактных подмножествах множества D_t, то функция $(f \circ \varphi) \cdot |det\,\varphi'|$ интегрируема в несобственном смысле по множеству D_t и имеет место равенство

$$\int\limits_{D_x} f(x)\,dx = \int\limits_{D_t} (f \circ \varphi)(t) \cdot |det\,\varphi'(t)|\,dt.$$

Тема 8 Приложения двойных и тройных интегралов

8.1 Площадь плоской фигуры и объем пространственного тела

Здесь и дальше под плоской фигурой $D \subset \mathbb{R}^2$ будем понимать множество $D \subset \mathbb{R}^2$, ограниченное кусочно-гладкими замкнутыми кривыми. Такие множества являются измеримыми, и для непрерывных функций на $\overline{D}$ всегда существует интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$.

Площадь плоской фигуры D вычисляется по формуле

$$S(D) = \iint\limits_D dxdy. \tag{8.1}$$

Множество $G \subset \mathbb{R}^3$ будем называть цилиндроидом, если оно сверху ограничено непрерывной поверхностью $z = f(x,y)$, $f(x,y) \geqslant 0$, снизу — плоскостью $z = 0$, а с боков — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси OZ, вырезающей на плоскости $z = 0$ плоскую фигуру D.

Цилиндроид является измеримым множеством в $\mathbb{R}^3$, и его объем вычисляется по формуле

$$V(G) = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy. \tag{8.2}$$

8.2 Площадь поверхности

Пусть поверхность Σ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v),$$

где функции $x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на замкнутой измеримой по Жордану области $D \subset \mathbb{R}^2$. Площадь поверхности Σ вычисляется по формуле

$$S(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv, \tag{8.3}$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Если же поверхность Σ задана в явном виде $z = f(x, y)$, причем функция f непрерывно дифференцируема на замкнутом измеримом по Жордану множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, то площадь поверхности Σ вычисляется по формуле

$$S(\Sigma) = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy. \tag{8.4}$$

8.3 Механические приложения двойного интеграла

С помощью кратных интегралов можно вычислять физические величины: массу, заряд, центр тяжести, момент инерции и т. д.

Пусть на некоторой фигуре $D \subset \mathbb{R}^2$ распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y)$, которая является неотрицательной и непрерывной функцией на $\overline{D}$, тогда масса фигуры D вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_D \rho(x, y)\, dxdy. \tag{8.5}$$

При сделанных выше предположениях статические моменты фигуры D относительно осей OX и OY вычисляются по формулам:

$$M_x = \iint\limits_D y\, \rho(x, y)\, dxdy,\ M_y = \iint\limits_D x\, \rho(x, y)\, dxdy. \tag{8.6}$$

Точка (x_0, y_0) называется центром масс фигуры D, если статические моменты точки (x_0, y_0) с массой m всей фигуры D равны соответствующим статическим моментам M_x и M_y фигуры D, т. е.

$$m \cdot x_0 = M_y,\ m \cdot y_0 = M_x.$$

Таким образом, центр масс (x_0, y_0) вычисляется по формулам:

$$x_0 = \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m}. \tag{8.7}$$

Из следствия 5.2 следует, что центр тяжести не зависит от выбора системы координат в $\mathbb{R}^2$.

Моменты инерции фигуры D относительно осей OX и OY находятся по формулам:

$$I_{ox} = \iint\limits_D y^2\,\rho(x,y)\,dxdy,\ \ I_{oy} = \iint\limits_D x^2\,\rho(x,y)\,dxdy, \tag{8.8}$$

а момент инерции относительно точки $(0,0)$ находится по формуле

$$I_o = \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dxdy. \tag{8.9}$$

8.4 Объем тела, механические приложения тройного интеграла

Здесь и дальше под телом будем понимать множество $G \subset \mathbb{R}^3$, ограниченное кусочно-гладкими замкнутыми поверхностями. Такие множества являются измеримыми, и для непрерывных функций на $\overline{G}$ всегда существует интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dxdydz$.

Объем тела G вычисляется по формуле

$$V = \iiint\limits_G dxdydz. \tag{8.10}$$

Пусть на некотором теле $G \subset \mathbb{R}^3$ распределена некоторая масса с плотностью $\rho(x,y,z)$, которая является неотрицательной и непрерывной функцией на $\overline{G}$, тогда масса тела G вычисляется по формуле

$$m = \iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dxdydz. \tag{8.11}$$

При сделанных выше предположениях статические моменты тела G относительно плоскостей XOY, YOZ и ZOX вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint\limits_G z\rho(x,y,z)\,dxdydz,\\ M_{yz} &= \iiint\limits_G x\rho(x,y,z)\,dxdydz,\\ M_{zx} &= \iiint\limits_G y\rho(x,y,z)\,dxdydz. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Координаты центра масс (x_0,y_0,z_0) тела G вычисляются по формулам:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m},\ \ y_0 = \frac{M_{zx}}{m}\ \ z_0 = \frac{M_{xy}}{m}. \tag{8.13}$$

Моменты инерции тела G относительно плоскостей XOY, YOZ и ZOX вычисляются соответственно по формулам:

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= \iiint\limits_G z^2 \rho(x,y,z)\, dxdydz, \\
I_{yz} &= \iiint\limits_G x^2 \rho(x,y,z)\, dxdydz, \\
I_{zx} &= \iiint\limits_G y^2 \rho(x,y,z)\, dxdydz;
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

а момент инерции относительно начала координат вычисляется по формуле

$$
I_o = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\, dxdydz. \tag{8.15}
$$

Ньютоновым потенциалом тела G в точке (x,y,z) называется интеграл

$$
u(x,y,z) = \iiint\limits_G \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \tag{8.16}
$$

где $r = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$, а $\rho(\xi,\eta,\zeta)$ — как обычно, плотность масс.

Материальная точка массой m притягивает тело с силой $\overrightarrow{F} = (F_x, F_y, F_z)$:

$$
\begin{aligned}
F_x &= km\frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint\limits_G \rho(\xi,\eta,\zeta)\, \frac{\xi-x}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\
F_y &= km\frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint\limits_G \rho(\xi,\eta,\zeta)\, \frac{\eta-y}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta, \\
F_z &= km\frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint\limits_G \rho(\xi,\eta,\zeta)\, \frac{\zeta-z}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,
\end{aligned}
\tag{8.17}
$$

где k — постоянная закона тяготения.

2 Двойные и тройные интегралы в теории и примерах

2.1 Вычисление двойных интегралов

2.1.1 Теорема Фубини для двойного интеграла

Определение 2.1.1 *Множество*

$$D = \{(x,y) \,|\, a \leqslant x \leqslant b,\ \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x),\ \varphi_1, \varphi_2 \in C[a,b]\}$$

называют множеством элементарным относительно оси OX.

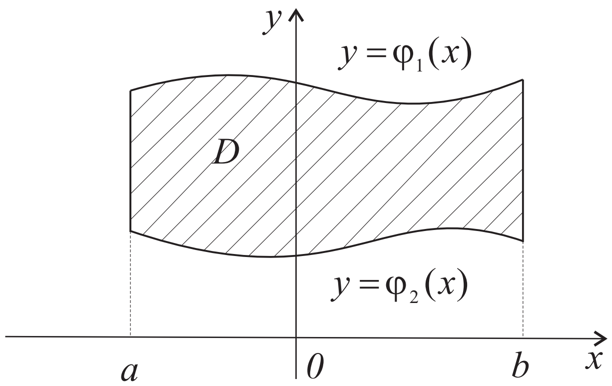

Рисунок 2 – Множество элементарное относительно оси ***OX***

Определение 2.1.2 *Множество*

$$D = \{(x,y) \,|\, \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y),\ c \leqslant y \leqslant d,\ \psi_1, \psi_2 \in C[a,b]\}$$

называют множеством элементарным относительно оси OY.

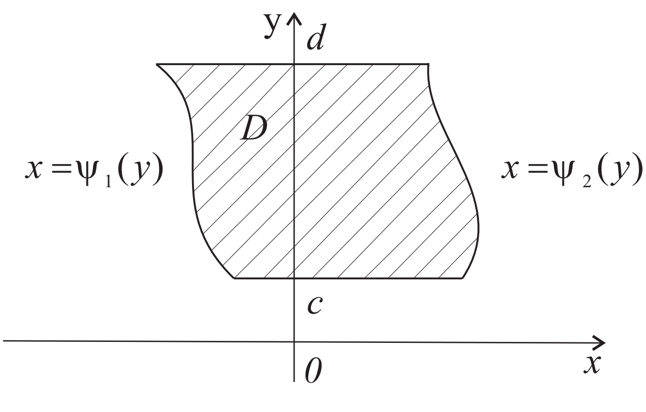

Рисунок 3 – Множество элементарное относительно оси ***OY***

Заметим, что элементарное множество является измеримым по Жордану множеством. Чаще всего нам придется пользоваться теоремой Фубини для двойных интегралов в следующем виде.

Теорема 2.1.1 *Пусть $f(x,y)$ непрерывна на D, тогда:*
1) если D — элементарное множество относительно оси OX, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy; \tag{2.1.1}$$

2) если D — элементарное множество относительно оси OY, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx; \tag{2.1.2}$$

3) если D — элементарное множество относительно осей OX и OY, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Значительно труднее сводить двойные интегралы к повторным для более сложных областей. Если множество D не является элементарным множеством относительно оси OX или OY, то множество D пытаются представить в виде конечного объединения непересекающихся (без общих внутренних точек) множеств D_k (к $= 1, 2, \ldots, n$), где D_k — элементарное множество относительно оси OX или OY. В этом случае существенную помощь может оказать рисунок множества D. В силу аддитивности интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{D_k} f(x,y)\,dxdy,$$

где каждый интеграл в сумме сводится к повторным с помощью (2.1.1) или (2.1.2). Множества D_k должны удовлетворять еще двум требованиям: их количество должно быть минимально, и на каждом из D_k функция $f(x,y)$ должна быть задана достаточно простым аналитическим выражением, удобным для вычисления интегралов.

Как видно из теоремы Фубини 2.1.1, вычисление двойных интегралов в конечном счете сводится к вычислению повторных интегралов, поэтому надо иметь навыки вычисления таких интегралов.

Пример 2.1.1 Вычислить интеграл
$$\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xydy.$$

$\triangleright$ Внутренний интеграл вычисляется в предположении, что x фиксировано, а y — аргумент, по которому вычисляется интеграл. Учитывая это, имеем
$$\int_0^1 dx \int_{x^2-1}^{1-x} xy\,dy = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\bigg|_{x^2-1}^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left((1-x)^2-(x^2-1)^2\right)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (3x^3-x^5-2x^2)\,dx = -\frac{1}{24}.\triangleleft$$

Как было отмечено выше, двойные интегралы вычисляются путем сведения их к вычислению повторных интегралов. В самом простейшем случае это делается легко для областей интегрирования, представляющих собой прямоугольники (брусы в $\mathbb{R}^2$).

Пример 2.1.2 Вычислить двойной интеграл
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},$$
где $D = \{(x,y)\,|\,1 \leqslant x \leqslant 2,\, 3 \leqslant y \leqslant 4\}$.

$\triangleright$ Брус (прямоугольник) D является элементарным множеством относительно и оси OX, и оси OY. Воспользовавшись теоремой 2.1.1, получим
$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 dx \int_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2} = -\int_1^2 \left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+3}\right) dx = \ln\frac{25}{24}.\triangleleft$$

Из всего многообразия задач на указанную выше тему рассмотрим следующие.

Пример 2.1.3 Для интеграла
$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$
расставить пределы интегрирования в обоих порядках, где множество $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1,\, x+y-1 \leqslant 0, y \geqslant 0\}$, $f(x,y) \in C(\overline{D})$.

$\triangleright$ Здесь множество интегрирования D задано неравенствами. В этом случае, как и в других подобных, переход от двойного интеграла к повторному может быть осуществлен чисто аналитически. Построение множества D вовсе не является необходимым условием при переходе от двойных интегралов к повторным, хотя чертеж и в этом случае делает переход более наглядным. Поэтому построение рисунка, особенно на первых этапах обучения, весьма желательно. Так как порядок интегрирования не задан, то его выбор определяется как видом множества D, так и свойствами подынтегральной функции, благодаря которым интегралы будут вычисляться проще. В данном примере сведем двойной интеграл к повторным для обоих порядков интегрирования.

Множество D изображено на рисунке 4.

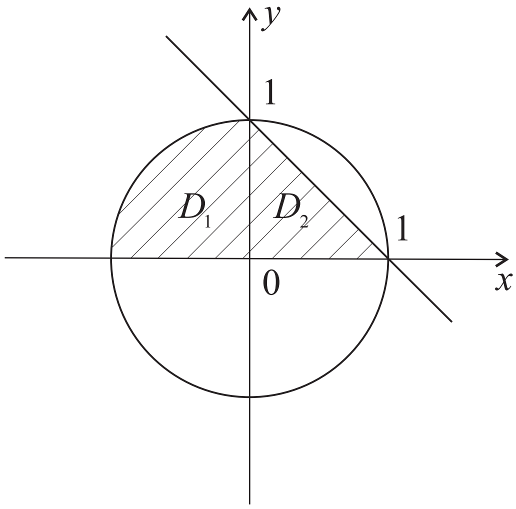

Рисунок 4 – Множество ***D*** из примера 2.1.3

Множество D является элементарным относительно и оси OX, и оси OY. Во втором случае множество интегрирования D не разбивается на составляющие области, так как правая и левая границы заданы одним аналитическим выражением (соответственно, слева — часть окружности, справа — отрезок прямой). Решая систему

$$\begin{cases} x + y & = & 1, \\ x^2 + y^2 & = & 1, \end{cases}$$

находим координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2 = 1$ и прямой $x + y = 1$: (0,1) и (1,0). С учетом того, что $y \geqslant 0$, к этим точкам добавим еще точку (-1,0), как точку пересечения окружности $x^2+y^2 = 1$ и прямой $y = 0$. Таким образом, мы указали крайние точки области D. Отсюда видно, что $0 \leqslant y \leqslant 1$, а x будет изменяться от $-\sqrt{1-y^2}$ (левое крайнее значение) до $1 - y$ (правое крайнее значение), т. е. множество

$D = \{(x,y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leqslant x \leqslant 1-y\}$. Имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx.$$

Если же мы сначала хотим проинтегрировать по y, а затем по x, то множество D надо разбить на две области $D_1 = \big\{(x,y) \mid -1 \leqslant x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\big\}$ и $D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\}$. Это связано с тем, что верхняя граница множества D указана двумя аналитическими выражениями $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,0]$ и $y = 1-x$, $x \in [0,1]$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x,y)\,dy. \triangleleft$$

Пример 2.1.4 В повторном интеграле $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)dy$ изменить порядок интегрирования, предварительно изобразив на рисунке множество интегрирования.

$\triangleright$ В предыдущем примере по множеству D мы определяли пределы изменения x и y. В этом примере задан интеграл с указанием порядка и пределов интегрирования по соответствующим переменным. По этим данным можно найти множество D. В нашем случае следует начинать с построения множества интегрирования, помня, что переменные пределы внутреннего интеграла являются границами изменения y при произвольно фиксированном на отрезке [0,2] значении x. Множество D имеет вид $D = \{(x,y)\,|\,0 \leqslant x \leqslant 2,\ (x-1)^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{5-x^2}\}$ и изображено на рисунке 5.

Заметим, что D есть элементарное множество относительно осей OX и OY. Так как справа и слева кривые, ограничивающие это множество, задаются каждая двумя аналитическими выражениями, то D представимо в виде объединения $D_1 \cup D_2$, где

$$D_1 = \{(x,y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant 1,\ 1-\sqrt{y} \leqslant x \leqslant 1+\sqrt{y}\},$$
$$D_2 = \{(x,y)\,|\,1 \leqslant y \leqslant \sqrt{5},\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{5-y^2}\}.$$

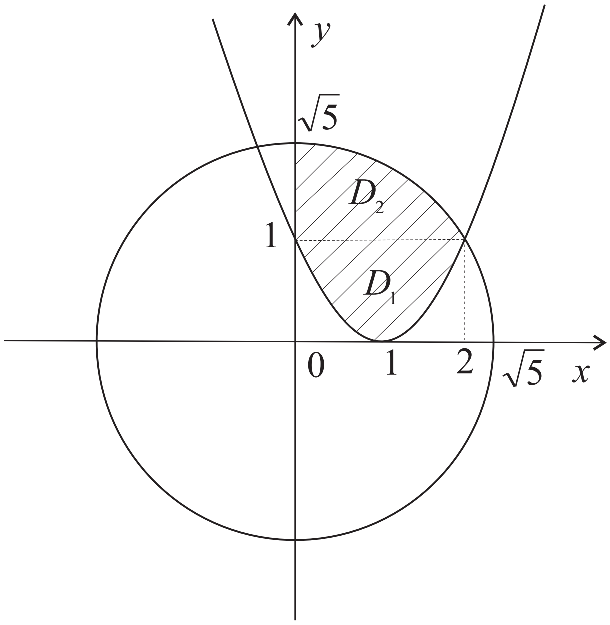

Рисунок 5 – Множество ***D*** из примера 2.1.4

Поэтому

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{5}} dy \int\limits_0^{\sqrt{5-y^2}} f(x,y)\,dx. \triangleleft$$

2.1.2 Замена переменных в двойном интеграле

Замена переменных

Одним из способов, облегчающих вычисления интегралов, является замена переменных в двойном интеграле. Ниже приведем три теоремы, относящиеся к замене переменных в двойном интеграле.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и $\Omega^* \subset \mathbb{R}^2$, $(x,y) \in \Omega$, $(u,v) \in \Omega^*$, и пусть задано отображение

$$\varphi : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} (u,v) \in \Omega^*$$

такое, что $\Omega = \varphi(\Omega^*)$.

Теорема 2.1.2 *Пусть φ — диффеоморфизм измеримого по Жордану множества Ω^* на такое же множество Ω, а D^* и D — измеримые по Жордану подмножества Ω^* и Ω соответственно, причем $\overline{D^*} \subset \Omega^*$, $\overline{D} \subset \Omega$ и $D = \varphi(D^*)$. Если $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, то*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v)) \cdot |\det\varphi'(u,v)|\,dudv. \qquad (2.1.3)$$

Здесь якобиан

$$\det \varphi^{'}(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Замечание 2.1.1 В этой теореме требуется, чтобы отображения φ и φ^{-1} были диффеоморфизмами на более „широких“ множествах, чем множества интегрирования.

Теорема 2.1.3 *Пусть φ — диффеоморфизм измеримого по Жордану множества D^* на такое же множество D. Пусть в D^* и D существуют множества T^* и S лебеговой меры нуль, и φ — диффеоморфизм открытого множества $D^* \setminus T^*$ на открытое множество $D \setminus S$. Если $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, и функция $\det \varphi^{'}$ определена и ограничена на D^*, то справедлива формула (2.1.3).*

Замечание 2.1.2 В этой теореме требуется, чтобы отображения φ и φ^{-1} были диффеоморфизмами на более „узких“ множествах, чем множества интегрирования, и разность между множеством интегрирования и более „узким“ множеством должна быть множеством лебеговой меры нуль.

На практике чаще всего точки множеств T^* и S — граничные точки множеств D^* и D соответственно. Этот факт будет использован в следующей теореме, но предварительно введем следующее понятие.

Пусть φ — непрерывно дифференцируемое отображение открытого множества D^* на D. Будем говорить, что частная производная $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ непрерывна на замыкании $\overline{D^*}$ множества D, если $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ непрывно продолжима с D^* на ее границу, т. е. если существует непрерывная на $\overline{D^*}$ функция, совпадающая с частной производной $\dfrac{\partial x}{\partial u}$ на D^*. Отображение φ называется непрерывно дифференцируемым на замыкании $\overline{D^*}$ открытого множества D^*, если частные производные $\dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v}, \dfrac{\partial y}{\partial u}, \dfrac{\partial y}{\partial v}$ непрерывны на замыкании $\overline{D^*}$.

Теорема 2.1.4 *Пусть φ — диффеоморфизм открытого множества D^* на такое же множество D, причем φ непрерывно дифференцируемо на замыкании $\overline{D^*}$ и $\overline{D} = \varphi(\overline{D^*})$. Если $f(x,y)$ непрерывна на $\overline{D}$, тогда имеет место формула (2.1.3).*

Замечание 2.1.3 В этой теореме не предполагается на границе множества D^* ни взаимной однозначности отображения φ, ни неравенства нулю его якобиана, и она является следствием теоремы 2.1.3.

Замечание 2.1.4 Пусть ψ — диффеоморфизм открытого множества Ω на такое же множество Ω^*, задаваемый с помощью формул:

$$\psi : \begin{cases} u = u(x,y), \\ v = v(x,y), \end{cases} \quad (x,y) \in \Omega.$$

Якобиан обратного отображения ψ^{-1} в точке (u,v) согласно замечанию 6.1 можно найти по формуле

$$\det(\psi^{-1}(u,v))' = \frac{1}{\det \psi'(x,y)}.$$

Следует заметить, что замена переменных в двойном интеграле предполагает изменение не только подынтегральной функции, но и множества интегрирования, и именно на это и надо обращать внимание. Необходимо отчетливо для себя выяснить, при каких условиях отображение областей при замене переменных будет взаимно однозначным и роль якобиана в этих отображениях. Иллюстрируя это, рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1.5 Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D (x^2y^2 + y^2)\, dxdy,$$

где $D = \{(x,y) \mid \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x},\ x \leqslant y \leqslant 3x\}$.

$\triangleright$ Множество D изображено на рисунке 6.

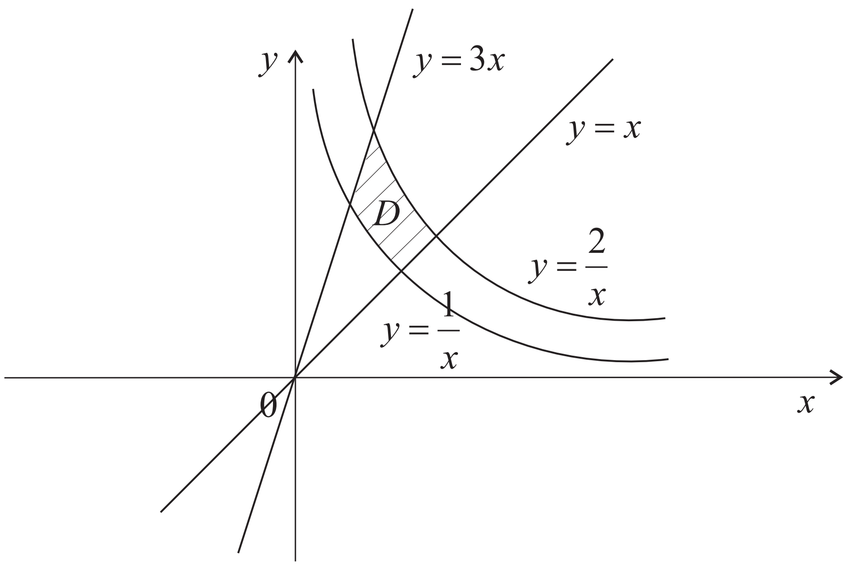

Рисунок 6 – Множество ***D*** из примера 2.1.5

Аналитический вид области D показывает, что, если ввести новые переменные u и v такие, что

$$\begin{cases} u = xy, \\ v = \dfrac{x}{y}, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

то $1 \leqslant u \leqslant 2,\ 1 \leqslant v \leqslant 3$.

Решая (2.1.4) относительно x и y, однозначно получим, что

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases} \tag{2.1.5}$$

Пусть множество $D^* = \{(u,v)\,|\,1 \leqslant u \leqslant 2,\, 1 \leqslant v \leqslant 3\}$. Тогда отображение $\varphi : \overset{\circ}{D}{}^* \to \overset{\circ}{D}$, задаваемое (2.1.5), является диффеоморфизмом с якобианом $\det \varphi'(u,v) = \dfrac{1}{2v} \neq 0$ на D^*, и отображение φ непрерывно дифференцируемо на D^*. Таким образом, можно воспользоваться формулой (2.1.3) в теореме 2.1.4. Формулой (2.1.3) можно воспользоваться и по теореме 2.1.2, если в качестве множества Ω^* взять, например, $\Omega^* = \{(u,v)\,|\,1/2 < u < 3,\, 1/3 < v < 4\}$. Таким образом,

$$\iint\limits_{D} (x^2y^2 + y^2)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} \left(\frac{u}{v}uv + uv\right) \frac{1}{2v}\, dudv =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{D^*} \left(\frac{u^2}{v} + u\right) dudv = \frac{1}{2} \int\limits_1^3 dv \int\limits_1^2 \left(\frac{u^2}{v} + u\right) du =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_1^3 \left(\frac{7}{3}\frac{1}{v} + \frac{3}{2}\right) dv = \frac{7}{6}\ln 3 + \frac{3}{2}.$$

Заметим, что исходный интеграл можно вычислить и непосредственно, переходя к повторному интегралу. В этом случае вычисления будут труднее. $\triangleleft$

Пример 2.1.6 Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{D} (x^4 - y^4)\, dxdy,$$

где $D = \{(x,y)\,|\, \dfrac{1}{x} \leqslant y \leqslant \dfrac{2}{x},\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 2\}$.

$\triangleright$ Множество D изображено на рисунке 7.

Аналитический вид области D подсказывает, что необходимо сделать следующую замену

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2, \\ v = xy. \end{cases} \tag{2.1.6}$$

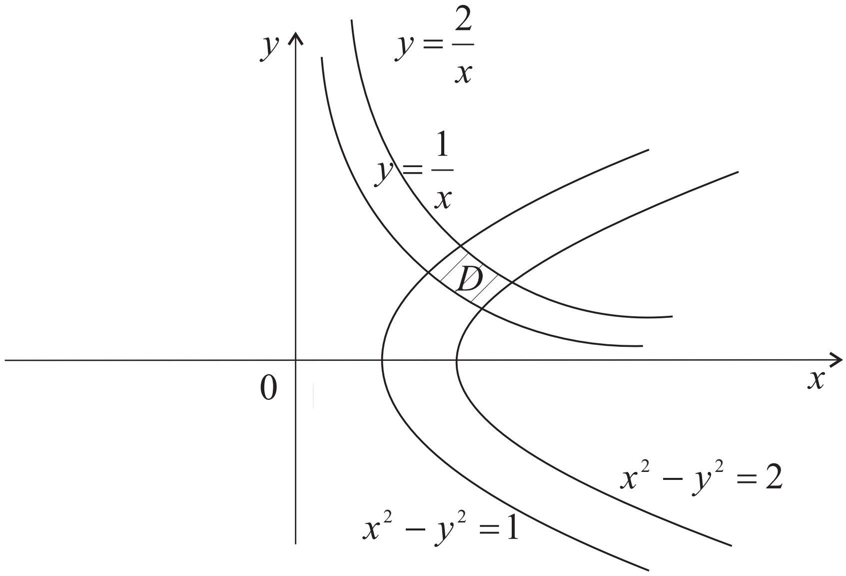

Рисунок 7 – Множество ***D*** из примера 2.1.6

Отображение ψ, задаваемое формулами (2.1.6), есть биекция области $\overset{\circ}{D}$ на область $\overset{\circ}{D}{}^* = \{(u, v) \,|\, 1 < u < 2,\ 1 < v < 2\}$, так как каждая точка $(x, y) \in D$ лежит только на одной кривой вида $x^2 - y^2 = c_1$, $1 \leqslant c_1 \leqslant 2$ и только на одной кривой вида $xy = c_2$, $1 \leqslant c_2 \leqslant 2$, а граница множества D состоит именно из таких кривых.

Не выражая явным образом переменные x и y через u и v (это требует решения кубического уравнения), найдем якобиан обратного отображения ψ^{-1}, воспользовавшись замечанием 2.1.4.

$$\det(\psi^{-1})'(u, v) = \frac{1}{\det \psi'(x, y)}.$$

$$\det \psi'(x, y) = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix} = 2(x^2 + y^2)$$

и поэтому $\det(\psi^{-1})'(u, v) = \dfrac{1}{2(x^2 + y^2)} = \dfrac{1}{2(x^2(u, v) + y^2(u, v))} \neq 0$ для всех $(u, v) \in \overset{\circ}{D}{}^*$.

Таким образом, биективные отображения ψ и ψ^{-1} есть соответственно диффеоморфизмы $\overset{\circ}{D} \to \overset{\circ}{D}{}^*$ и $\overset{\circ}{D}{}^* \to \overset{\circ}{D}$, и ψ^{-1} непрерывно дифференцируемо на $D^* = \overline{\overset{\circ}{D}{}^*}$. Следовательно, выполнены все условия теоремы 2.1.4 для отображения $\varphi = \psi^{-1}$, и поэтому

$$\iint\limits_D (x^4 - y^4)\, dxdy = \iint\limits_D (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)\, dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} u(x,y)(x^2+y^2)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D^*} u \cdot (x^2(u,v)+y^2(u,v)) \cdot \frac{1}{2(x^2(u,v)+y^2(u,v))}\,dudv =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} u\,dudv = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 dv \int\limits_1^2 u\,du = \frac{3}{4}. \triangleleft$$

Замена переменных, полярные координаты

Рассмотрим отображение $\mathcal{P} : (r,\varphi) \to (x,y)$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \tag{2.1.7}$$

$(r,\varphi) \in T = \{(r,\varphi)\,|\,r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

Числа r,φ называются полярными координатами точки (x,y), если они связаны соотношениями (2.1.7). Полярные координаты (r,φ) имеют простой геометрический смысл.

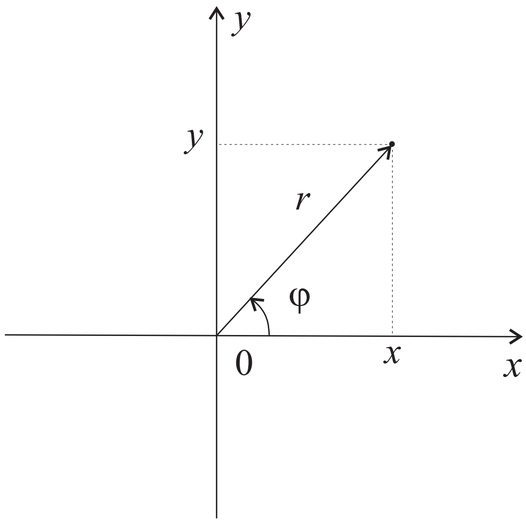

Рисунок 8 – Полярные координаты

На рисунке 8 координата r есть длина радиус-вектора из начала координат в точку (x,y), φ — угол между положительным направлением оси OX и этим вектором.

Якобиан отображения $\mathcal{P}$ равен r. Отображение $\mathcal{P} : T \to \mathbb{R}^2$ не является диффеоморфизмом, так как на множестве $T_1 = \{(r,\varphi)\,|\,r = 0,$ $0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$ нарушаются условия взаимной однозначности и неравенства нулю якобиана и, кроме того, множество T не является открытым.

Положим, $T^* = T_1 \cup T_2$, где $T_2 = \{(r, \varphi) \,|\, r > 0,\ \varphi = 0\}$. Отображение $\mathcal{P} : T \setminus T^* \to \mathbb{R}^2 \setminus A$, где $A = \{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x < \infty,\ y = 0\}$ является диффеоморфизмом. Множества T^* и A множества меры нуль в $\mathbb{R}^2$.

Пусть теперь задано измеримое по Жордану множество $D \subset \mathbb{R}^2$, и на $\overline{D}$ задана непрерывная функция $f(x, y)$. Через D^* обозначим прообраз множества D при отображении $\mathcal{P}$.

Возможны два случая:

1) Пересечение $D^* \cap T^* = \emptyset$, также как и $D \cap A = \emptyset$. В этом случае можно воспользоваться теоремой 2.1.2, из которой и следует формула замены переменных при переходе к полярным координатами.

$$\iint\limits_{D} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi. \tag{2.1.8}$$

2) Пересечение $D^* \cap T^* \neq \emptyset$, также как и $D \cap A \neq \emptyset$. В этом случае уже нельзя применять теорему 2.1.2. Для множеств $S^* = D^* \cap T^*$ и $S = D \cap A$ имеет место включение $S^* \subset T^*$ и $S \subset A$, и поэтому S^* и S — множества лебеговой меры нуль. На основании теоремы 2.1.3 можно записать формулу (2.1.8).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.5 *Пусть отображение $\mathcal{P}$ переводит измеримое по Жордану множество D^* на такое же множество D, и пусть на $\overline{D}$ задана непрерывная функция $f(x, y)$, тогда имеет место формула (2.1.8).*

Пример 2.1.7 Переходя к полярным координатам, вычислить интеграл

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

где $D = \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant ax\}$.

$\triangleright$ Граница множества D есть окружность $\left(x - \dfrac{1}{2}a\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}a^2$. В полярных координатах D запишется в виде $r^2 \leqslant a\, r\cos\varphi$. В силу того, что $r \geqslant 0$, имеем $0 \leqslant r \leqslant a\cos\varphi$. Поэтому $\cos\varphi \geqslant 0$ и, следовательно, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Тот факт, что $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, виден и из рисунка 9.

Таким образом, множество полярных координат $(r, \varphi) \in D^*$ запишется в виде $D^* = \{(r, \varphi) \,|\, -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant r \leqslant a\cos\varphi\}$. По теореме 2.1.5 имеем

$$\iint\limits_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{a\cos\varphi} r \cdot r\, dr = \frac{1}{3}a^3 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\, d\varphi = \frac{4}{9}a^3. \triangleleft$$

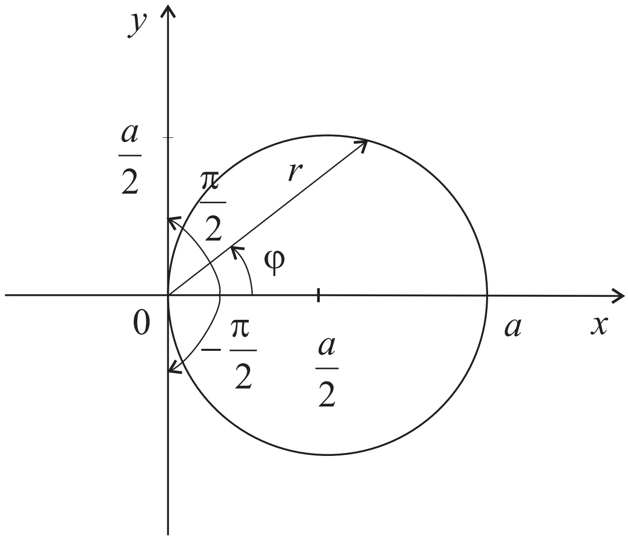

Рисунок 9 – Множество ***D*** из примера 2.1.7

Замена переменных, обобщенные полярные координаты

В тех случаях, когда по заданному уравнению кривой, ограничивающему множество интегрирования, не представляется возможным указать пределы интегрирования, полезно перейти к обобщенным полярным координатам: $x = ar\cos^\alpha\varphi$, $y = b\sin^\alpha\varphi$, причем $r \geqslant 0$, и $\varphi \in [0; 2\pi]$ ($\varphi \in [-\pi; \pi]$), либо $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Пределы изменения переменной φ зависят от того, на каком отрезке обе функции $\cos^\alpha\varphi$ и $\sin^\alpha\varphi$ имеют смысл, и выбираются так, чтобы их значения на выбранном отрезке не повторялись одновременно, кроме того, уравнение кривой часто дает ограничение на промежуток изменения φ.

Замечание 2.1.5 Если $\alpha < 1$, то в условии теорем 2.1.2–2.1.4 будет нарушаться не только требование биективности отображения, но и требование его гладкости. После такой замены получаем, вообще говоря, несобственный двойной интеграл по ограниченному измеримому по Жордану множеству, и в таком случае надо применить теорему 7.5.

Не приводя подробные рассуждения, отметим только, что и в этом случае можно переходить к обобщенным полярным координатам: несобственный интеграл сходится и равен повторному, причем интеграл по φ будет несобственным (разумеется, подынтегральная функция $f(x, y)$ должна быть достаточно „хорошей“, например, непрерывной).

Якобиан перехода к обобщенным полярным координатам равен $\alpha\, abr\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$.

Пример 2.1.8 Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D dxdy,$$

где D ограничена кривой $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^3=\dfrac{x^2}{h^2}$.

$\triangleright$ Положим $x = ar\cos^2\varphi$, $y = br\sin^2\varphi$. Уравнение кривой запишется в виде $r=\dfrac{a^2}{h^2}\cos^4\varphi$. Функции $\cos^2\varphi$, $\sin^2\varphi$ имеют смысл при любом $\varphi\in[0;\,2\pi]$, но значения этих функций не будут повторяться только на отрезке $[0;\dfrac{\pi}{2}]$. Уравнение кривой никаких ограничений на φ не дает. Таким образом, $\varphi\in[0;\dfrac{\pi}{2}]$. Якобиан преобразования равен $2abr\cos\varphi\sin\varphi$. Имеем:

$$\iint\limits_D dxdy = 2ab\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a^2/h^2\,\cos^4\varphi} r\cos\varphi\sin\varphi\,dr =$$

$$= ab\,\frac{a^4}{h^4}\int\limits_0^{\pi/2}\cos^9\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{a^5b}{10h^4}.$$

Заметим, что вычисленный интеграл с геометрической точки зрения равен площади плоской фигуры D. $\triangleleft$

2.1.3 Приложения двойного интеграла

Двойные интегралы имеют самые разнообразные приложения: вычисление площади плоской фигуры; вычисление объема тела; вычисление площади поверхности; вычисление массы пластинки заданной плотности и ее статических моментов относительно осей координат, центра масс этой пластинки и т. д.

Формулы приложений двойных интегралов приведены в теме 8 раздела 1.

Пример 2.1.9 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x+1$, $y=\cos x$, $y=0$.

$\triangleright$ Фигура D, ограниченная указанными кривыми, имеет следующий вид, изображенный на рисунке 10.

Множество D представим в виде $D = D_1\cup D_2$, где $D_1=\{(x,y)\,|\,-1\leqslant x\leqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant x+1\}$, $D_2=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant y\leqslant\cos x\}$.

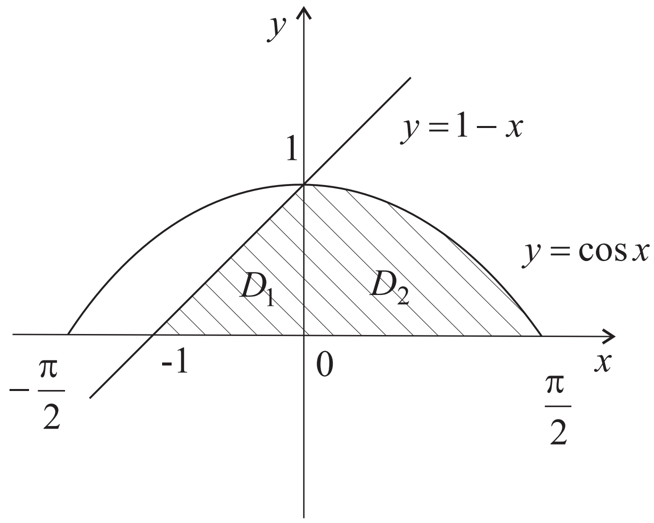

Рисунок 10 – Множество ***D*** из примера 2.1.9

Тогда площадь фигуры D будет равна

$$S = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{x+1} dy + \int\limits_{0}^{\pi/2} dx \int\limits_{0}^{\cos x} dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (x+1)\, dx + \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.\triangleleft$$

Пример 2.1.10 Произведя надлежащую замену переменной, найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^3 = \frac{x^4 y}{c^5}.$$

$\triangleright$ Перейдем к обобщенным полярным координатам $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$. Якобиан этого отображения равен abr. Уравнение кривой запишется в виде $r = \dfrac{a^4 b}{c^5}\cos^4\varphi\sin\varphi$. Функции $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ имеют смысл при $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, и на этом же отрезке не повторяются их значения. Из вида уравнения кривой следует, что $y \geqslant 0$, а это означает, что $\sin\varphi \geqslant 0$, т. е. $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$. Так как в уравнение кривой x входит четным образом, то кривая будет симметрична относительно оси OY, поэтому можно считать, что $x \geqslant 0$, т. е. $\cos\varphi \geqslant 0$, откуда $\varphi \in [0; \dfrac{\pi}{2}]$. Таким образом, площадь искомой фигуры будет равна удвоенной площади фигуры с обобщенными полярными координатами $0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{a^4 b}{c^5}\cos^4\varphi\sin\varphi$.

$$S = \iint\limits_D dxdy = 2ab \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{g(\varphi)} r\,dr = \frac{a^9b^3}{c^{10}} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^8\varphi \sin^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{a^9b^3}{2c^{10}} B\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{a^9b^3}{2c^{10}} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{7\pi}{512}\frac{a^9b^3}{c^{10}},$$

где $g(\varphi) = \dfrac{a^4b}{c^5}\cos^4\varphi\sin\varphi$, а $B(x,y)$, $\Gamma(x)$ — бета и гамма функции соответственно. ◁

Пример 2.1.11 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$a^6x^6 + b^6y^6 = 6c^2x^4y.$$

▷ Из уравнения кривой следует, что $y \geqslant 0$, и кривая симметрична относительно оси OY. Поэтому рассмотрим кривую только в первом квадранте, где положим:

$$x = \frac{1}{a} r\cos^{1/3}\varphi,\ y = \frac{1}{b} r\sin^{1/3}\varphi.$$

Уравнение кривой в новых координатах запишется в следующем виде:

$$r = \frac{6c^2}{a^4b} r\cos^{4/3}\varphi\sin^{1/3}\varphi.$$

Из условий $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, следует, что $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (аналогично предыдущему примеру).

Поскольку якобиан при переходе к новым координатам равен $\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{3} r\cos^{-2/3}\varphi\sin^{-2/3}\varphi$, то

$$S = \frac{2}{3ab} \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{6c^2/a^4b\ \cos^{4/3}\varphi\sin^{1/3}\varphi} r\cos^{-2/3}\varphi\sin^{-2/3}\varphi\, dr =$$

$$= \frac{2}{3ab}\cdot\frac{36c^4}{a^8b^2} \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi = \frac{3\pi c^4}{a^9b^3}.$$

Заметим, что здесь якобиан неограничен на $[0; \frac{\pi}{2}]$, и мы воспользовались замечанием 2.1.5. ◁

Пример 2.1.12 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

$$x^2 + y^2 = a^2,\ z = 0,\ x + y + z = 4a.$$

$\triangleright$ Тело G сверху ограничено поверхностью (плоскостью) $z = 4a - x - y$, снизу — плоскостью $z = 0$, сбоку — цилиндрической поверхностью $x^2 + y^2 = a^2$. Поэтому

$$V = \iint\limits_D (4a - x - y)\, dxdy,$$

где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant a^2\}$.

Переходя к полярным координатам и вычисляя интегралы, имеем

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{a} (4a - r\cos\varphi - r\sin\varphi) r\, dr =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} (2a^3 - \frac{1}{3}a^3(\cos\varphi + \sin\varphi))\, d\varphi = 4\pi a^3. \triangleleft$$

Пример 2.1.13 Вычислить площадь части поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, если $x^2 + y^2 \leqslant 2ax$.

$\triangleright$ Часть поверхности, площадь которой необходимо вычислить, представляет собой часть конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, находящейся внутри цилиндра $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

Так как поверхность задана в явном виде $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, то площадь поверхности вычисляется по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dxdy.$$

В нашем случае $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2ax\}$. Имеем:

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dxdy = \sqrt{2} \iint\limits_D dxdy = \sqrt{2}\pi a^2,$$

как площадь круга радиуса a (разумеется, этот интеграл можно вычислить непосредственно, переходя к полярным координатам). $\triangleleft$

Пример 2.1.14 Найти массу пластинки, имеющей форму кольца, радиусы внутренней и внешней окружностей которого соответственно R_1 и R_2, если плотность пластинки в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до центра кольца.

$\triangleright$ Пусть $R_2 > R_1$ и пусть кольцо D образовано двумя окружностями $x^2 + y^2 = R_1^2$ и $x^2 + y^2 = R_2^2$. Если k — коэффициент пропорциональности, то плотность $\rho(x, y) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Масса m будет вычисляться по формуле

$$m = \iint\limits_D \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам, имеем

$$m = \int\limits_0^{2\varphi} d\varphi \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{k}{r}\, r\,dr = k\int\limits_0^{2\pi} (R_2 - R_1)\,d\varphi = 2\pi k(R_2 - R_1).\lhd$$

Пример 2.1.15 Найти статические моменты относительно осей координат, центр масс однородной пластинки, ограниченной кривыми $y = 4 - x^2$, $y + 2x = 4$.

$\rhd$ Пластинка изображена на рисунке 11.

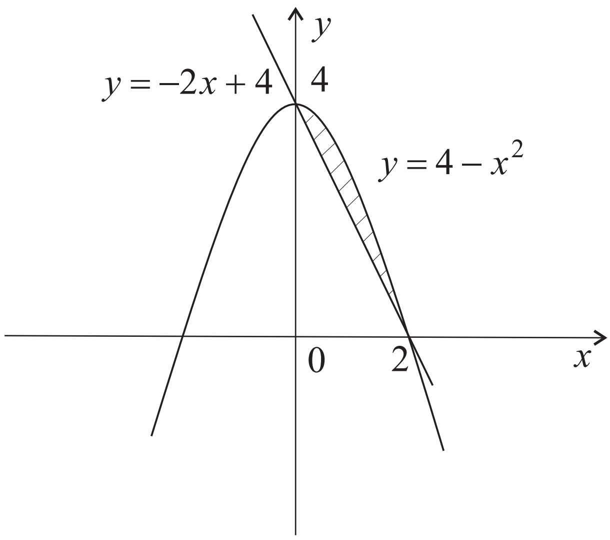

Рисунок 11 – Пластина ***D*** из примера 2.1.15

Статические моменты вычисляются по формулам:

$$M_y = \iint\limits_D x\,\rho(x,y)\,dxdy,$$

$$M_x = \iint\limits_D y\,\rho(x,y)\,dxdy,$$

а центр масс —

$$x_0 = \frac{M_y}{m},\ y_0 = \frac{M_x}{m},$$

где

$$m = \iint\limits_D \rho(x,y)\,dxdy.$$

Так как $\rho(x, y) = \rho = const$, то

$$m = \rho \iint\limits_D dxdy = \rho \int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x}^{4-x^2} dy = \rho \int\limits_0^2 (2x - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\rho,$$

$$M_y = \rho \iint\limits_D x\, dxdy = \rho \int\limits_0^2 x\, dx \int\limits_{4-2x}^{4-x^2} dy = \rho \int\limits_0^2 (2x^2 - x^3)\, dx = \frac{4}{3}\rho,$$

$$M_x = \rho \iint\limits_D y\, dxdy = \rho \int\limits_0^2 dx \int\limits_{4-2x}^{4-x^2} y\, dy = \rho \int\limits_0^2 (x^4 + 16x - 12x^2) dx = \frac{16}{5}\rho.$$

Поэтому $x_0 = 1,\ y_0 = \dfrac{12}{5}$. $\triangleleft$

2.2 Вычисление тройных интегралов

2.2.1 Теорема Фубини для тройного интеграла

2.2.2 Замена переменной в тройном интеграле: переход к цилиндрическим, сферическим и обобщенным цилиндрическим и сферическим координатам

2.2.1 Теорема Фубини для тройного интеграла

Вычисление тройных интегралов фактически мало чем отличается от вычисления двойных интегралов, если пользоваться наглядными геометрическими представлениями. Остановимся более подробно на особенностях вычисления тройных интегралов. Основным приемом вычисления тройных интегралов, как и двойных, является сведение их к повторным, то есть применение теоремы Фубини. Сформулируем теорему Фубини для одного из простейших случаев для условий, накладываемых на множество интегрирования и интегрируемую функцию.

Теорема 2.2.1 *Пусть* $D_{xy} \subset \mathbb{R}^2$ *— замкнутое измеримое по Жордану множество,* $\Omega = \{(x,y,z) \mid \varphi_1(x,y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x,y), \ (x,y) \in D;\ \varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y) \in C(D)\}$ *и* $f(x,y,z) \in C(\Omega)$*, тогда*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Здесь следует заметить, что во внутреннем интеграле аргументы рассматриваются как постоянные, а единственной переменной интегрирования при этом является z. После вычисления внутреннего интеграла получится функция двух переменных x и y, от которой необходимо вычислить двойной интеграл по множеству D, способы вычисления которого нам известны.

Кроме указанной формулировки теоремы Фубини существует еще одна, применение которой в некоторых случаях существенно упрощает вычисления.

Теорема 2.2.2 *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *— множество, ограниченное кусочно-гладкой замкнутой поверхностью без самопересечений и* $f(x,y,z) \in C(\Omega)$*, тогда*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_{c}^{d} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy,$$

где D_z *— сечение множества* Ω *плоскостью параллельной плоскости* XOY *и проходящей через произвольную точку* $z \in [c;d]$*, а отрезок*

$[c; d]$ *есть ортогональная проекция* Ω *на ось* OZ.

Сформулированные теоремы остаются в силе, если поменять местами x и z или y и z во всех формулах (за исключением подынтегральной функции).

Пример 2.2.1 Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$, где множество Ω ограничено поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = R^2$, причем $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

$\triangleright$ Множество Ω представляет собой часть пространства $\mathbb{R}^3$, изображенного на рисунке 12.

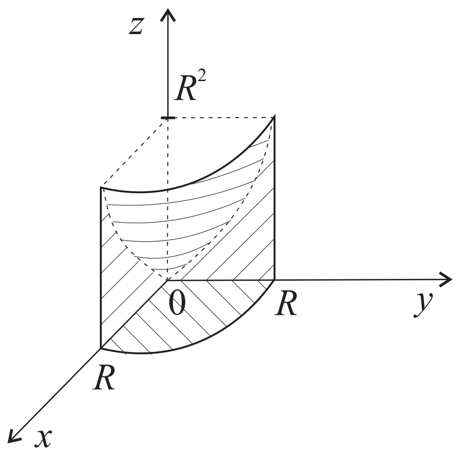

Рисунок 12 – Множество Ω из примера 2.2.1

Это множество расположено внутри первой четверти цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограничено сверху поверхностью $z = x^2 + y^2$, а снизу — плоскостью $z = 0$.

Если воспользоваться теоремой 2.2.1, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_{D} dxdy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz,$$

где $D = \left\{(x, y) \,|\, 0 \leqslant x \leqslant R,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}\,\right\}$. Область D изображена на рисунке 13.

Расставляя пределы интегрирования в двойном интеграле в разном порядке, получаем, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz =$$

$$= \int\limits_0^R dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz.$$

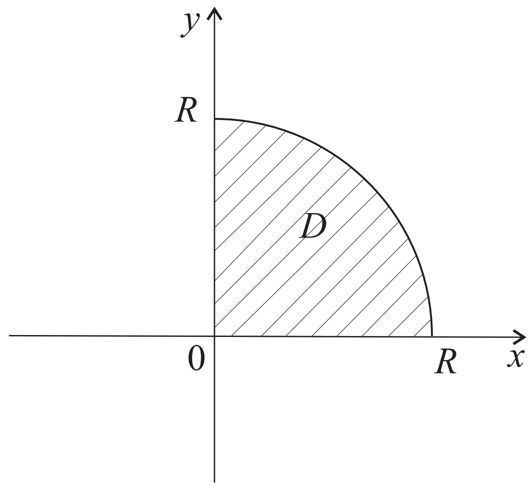

Рисунок 13 – Множество ***D*** из примера 2.2.1

Если же воспользоваться теоремой 2.2.2, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{R^2} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,dxdy,$$

где множество $D_z = \{(x,y)\,|\,z \leqslant x^2+y^2 \leqslant R^2\}$ изображено на рисунке 14.

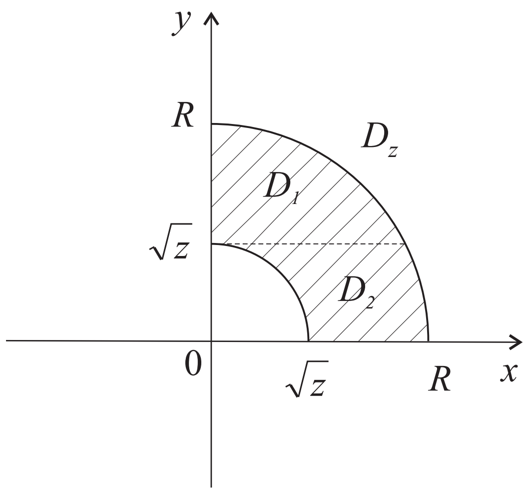

Рисунок 14 – Множество $\boldsymbol{D_z}$ из примера 2.2.1

Разбивая множество D_z на D_1 и D_2, получим, что

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{R^2} dz \int\limits_{\sqrt{z}}^{R} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^{R^2} dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dy \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$$

Разобъем D_z на D_1' и D_2', что изображено на рисунке 15.

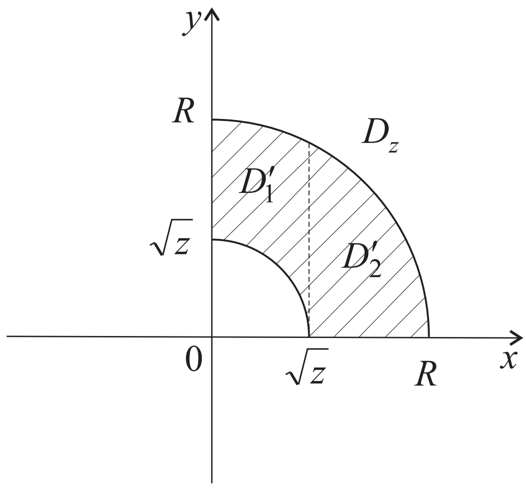

Рисунок 15 – Множество $\boldsymbol{D_z}$ из примера 2.2.1

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^{R^2} dz \int\limits_0^{\sqrt{z}} dx \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy +$$

$$+\int\limits_0^{R^2} dz \int\limits_{\sqrt{z}}^{R} dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

Теперь запишем тройной интеграл в виде повторного, в котором интегрирование проводится сначала по y, затем по z и x. Для этого опять же воспользуемся теоремой 2.2.2, формулу из которой запишем в виде

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{D_x} f(x,y,z)\,dydz,$$

где множество D_x является сечением множества Ω плоскостью параллельной плоскости YOZ и проходящей через произвольную точку $x \in [a;b]$, а отрезок $[a;b]$ есть ортогональная проекция Ω на ось OX.

В нашем случае отрезок $[a;b] = [0;R]$, а D_x изображено на рисунке 16.

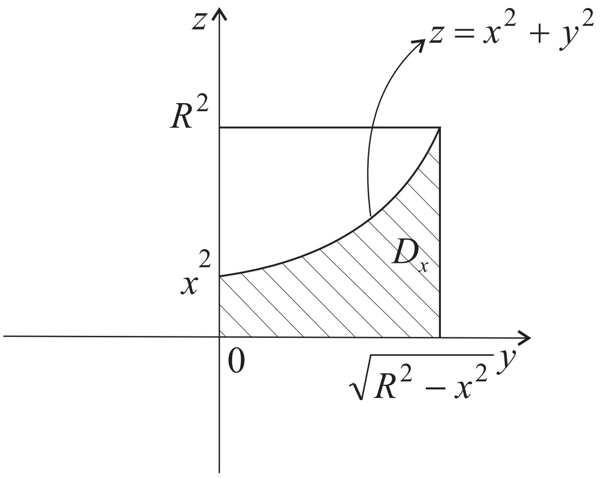

Рисунок 16 – Множество $\boldsymbol{D}_x$ из примера 2.2.1

Поэтому

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^R dx \int\limits_0^{x^2} dz \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy +$$

$$+ \int\limits_0^R dx \int\limits_{x^2}^{R^2} dz \int\limits_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy.$$

Аналогично можно записать повторный интеграл с порядком интегрирования сначала по x, затем по z и y. Но мы воспользуемся теоремой 2.2.1, формулу из которой при соответствующих изменениях запишем в следующем виде:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{yz}} dydz \int\limits_{\psi_1(y,z)}^{\psi_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx.$$

В нашем случае множество D_{yz} изображено на рисунке 17.

Применяя формулу, получим

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_0^R dy \int\limits_0^{y^2} dz \int\limits_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^R dy \int\limits_{y^2}^{R^2} dz \int\limits_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx. \triangleleft$$

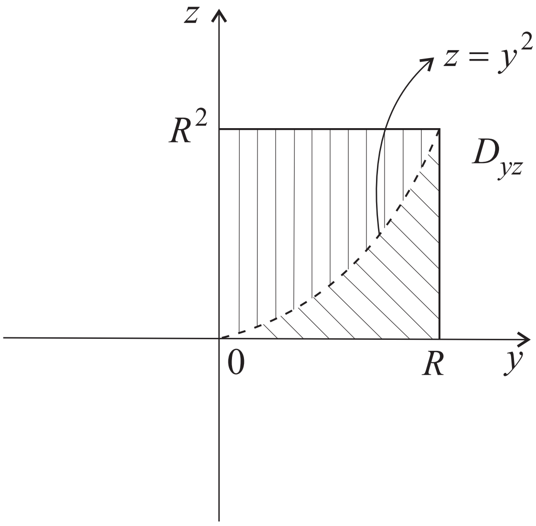

Рисунок 17 – Множество $\boldsymbol{D}_{yz}$ из примера 2.2.1

Пример 2.2.2 Пусть $f(x, y, z)$ непрерывна на множестве Ω. Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\mathcal{I} = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x, y, z)\, dz.$$

$\triangleright$ Функция $f(x, y, z)$ непрерывна на множестве $\Omega = \{(x, y, z) \mid -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -\sqrt{1-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1\}$. Множество Ω изображено на рисунке 18.

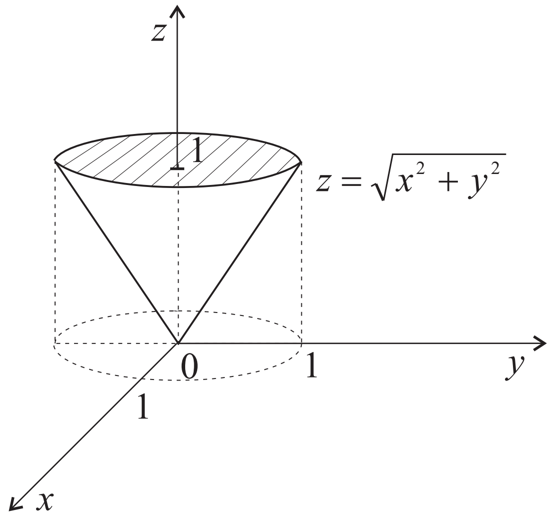

Рисунок 18 – Множество Ω из примера 2.2.2

В силу непрерывности $f(x,y,z)$ интеграл $\mathfrak{I}$ можно записать в виде

$$\mathfrak{I} = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz,$$

где $D_{xy} = \{(x,y) \,|\, x^2+y^2 \leqslant 1\}$.

Меняя порядок интегрирования на множестве D_{xy}, получим

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz.$$

Множество Ω можно представить в следующем виде:

$$\Omega = \{(x,y,z) \,|\, (y,z) \in D_{yz},\ -\sqrt{z^2-y^2} \leqslant x \leqslant \sqrt{z^2-y^2}\},$$

где множество D_{yz} изображено на рисунке 19.

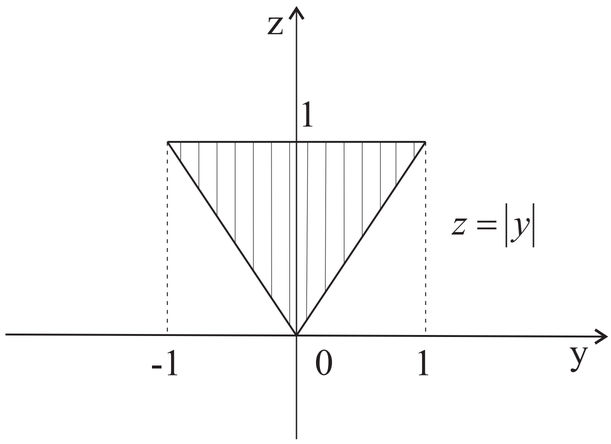

Рисунок 19 – Множество $\boldsymbol{D}_{\mathbf{yz}}$ из примера 2.2.2

Поэтому

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{|y|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx. \tag{2.2.1}$$

Аналогично множество Ω можно записать в виде:

$$\Omega = \{(x,y,z) \,|\, (x,z) \in D_{xz},\ -\sqrt{z^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{z^2-x^2}\},$$

где множество D_{xz} изображено на рисунке 20.

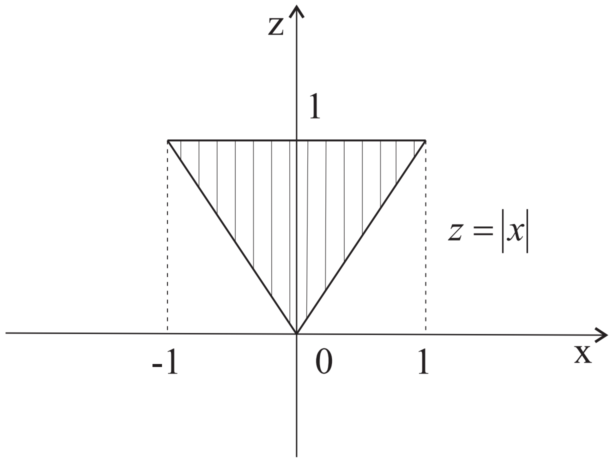

Рисунок 20 – Множество $\boldsymbol{D}_{\mathbf{xz}}$ из примера 2.2.2

Поэтому

$$\mathfrak{I} = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{|x|}^{1} dz \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{1} dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x,y,z)\,dy. \tag{2.2.2}$$

Заметим, во-первых, что формула (2.2.2) получается из (2.2.1) простой переменой местами пределов интегрирования x и y, и, во-вторых, множества D_{yz} и D_{xz} есть проекции Ω на плоскость YZ и XZ соответственно.

2.2.2 Замена переменной в тройном интеграле: переход к цилиндрическим, сферическим и обобщенным цилиндрическим и сферическим координатам

При решении задач, связанных с тройным интегралом, формула замены переменных чаще применяется в сформулированном ниже виде. Пусть отображение φ задано формулами

$$\begin{cases} x &= x(u,v,w), \\ y &= y(u,v,w), \quad (u,v,w) \in G^* \\ z &= z(u,v,w), \end{cases}$$

и пусть $G = \varphi(G^*)$ — образ множества G^* при отображении φ.

Теорема 2.2.3 *Пусть φ — диффеоморфизм открытого измеримого по Жордану множества $G^* \subset \mathbb{R}^3$ на такое же множество $G = \varphi(G^*) \subset \mathbb{R}^3$. Пусть далее Ω — измеримое по Жордану множество, такое, что $\overline{\Omega} \subset G$, и пусть на $\overline{\Omega}$ задана непрерывная функция*

$f(x, y, z)$, тогда

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))|\det \varphi'|\, dudvdw, \qquad (2.2.3)$$

где $\det \varphi'$ — якобиан отображения φ , а Ω^* прообраз множества Ω, то есть $\Omega = \varphi(\Omega^*)$ $\big(\Omega^* = \varphi^{-1}(\Omega)\big)$.

Замечание 2.2.1 В теореме требуется, чтобы диффеоморфизмы φ и φ^{-1} были определены на множестве более „широком“, чем множество интегрирования.

Теорема 2.2.4 *Пусть φ — отображение измеримого по Жордану множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на такое же множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Если в Ω^* и Ω существуют множества S^* и S лебеговой меры нуль такие, что $\Omega^* \setminus S^*$ и $\Omega \setminus S$ — открытые множества и φ отображает диффеоморфно $\Omega^* \setminus S^*$ на $\Omega \setminus S$, причем $\det \varphi'$ ограничен на Ω^*, тогда для непрерывной на Ω^* функции $f(x, y, z)$ имеет место формула (2.2.3).*

Замечание 2.2.2 В теореме требуется, чтобы диффеоморфизмы φ и φ^{-1} были определены на множестве более „узком“, чем множество интегрирования, причем разность между множеством интегрирования и этим множеством должна быть множеством лебеговой меры нуль.

Теорема 2.2.5 *Пусть φ — диффеоморфизм открытого измеримого по Жордану множества $\Omega^* \subset \mathbb{R}^3$ на такое же множество $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, причем отображение φ непрерывно дифференцируемо на $\overline{\Omega}^*$. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, то имеет место формула (2.2.3).*

Замечание 2.2.3 В теореме не требуется на границе множеств Ω и Ω^* для отображений φ и φ^{-1} ни биективности, ни неравенства нулю якобиана. Эта теорема является простым следствием теоремы 2.2.4.

Пример 2.2.3 Вычислить тройной интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{\sqrt{z^4+1}}{xy}\, dxdydz,$$

где $\Omega = \{(x, y, z)\,|\, 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 3x,\ 0 \leqslant z \leqslant 3(x+y) \leqslant 6z,\ 1 \leqslant 4z(x+ + y) \leqslant 4\}$.

$\triangleright$ Рассмотрим отображение

$$\psi:\ u = \frac{y}{x},\ v = \frac{x+y}{z},\ w = z(x+y).$$

При этом отображении множество Ω отобразится во множество

$\Omega^* = \{(u,v,w)\,|\,1 \leqslant u \leqslant 3,\ \frac{1}{3} \leqslant v \leqslant 2,\ \frac{1}{4} \leqslant w \leqslant 1\}$, обратное отображение ψ^{-1} задается формулами $x = \frac{\sqrt{vw}}{u+1}$, $y = \frac{u\sqrt{vw}}{u+1}$, $z = \sqrt{\frac{w}{v}}$.

Якобиан отображения ψ^{-1} равен

$$\begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{vw}}{(u+1)^2} & \frac{1}{2(u+1)}\cdot\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{1}{2(u+1)}\cdot\sqrt{\frac{v}{w}} \\ \frac{\sqrt{vw}}{(u+1)^2} & \frac{u}{2(u+1)}\cdot\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{u}{2(u+1)}\cdot\sqrt{\frac{v}{w}} \\ 0 & -\frac{1}{2v}\cdot\sqrt{\frac{w}{v}} & \frac{1}{2\sqrt{vw}} \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{w}}{\sqrt{v}(u+1)^2}.$$

Из вида формул отображения ψ^{-1} видно, что для множества Ω^* существует открытое измеримое по Жордану множество $G^* \supset \Omega$, например, $G^* = \{(u,v,w)\,|\,\frac{1}{2} < u < 4,\ \frac{1}{8} < v < 3,\ \frac{1}{5} < w < 2\}$, на котором ψ^{-1} будет диффеоморфизмом. Таким образом, для отображения $\varphi = \psi^{-1}$ и подынтегральной функции выполнены все условия теоремы 2.2.3, и справедлива формула (2.2.3).

$$\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{z^4+1}xy\,dxdydz = \int\limits_1^3 du \int\limits_{1/3}^2 dv \int\limits_{1/4}^1 \frac{(w^2+v^2)(u+1)w^{1/2}}{v^2uvwv^{1/2}(u+1)^2}\,dw =$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{du}{u} \int\limits_{1/3}^2 \frac{dv}{v^{7/2}} \int\limits_{1/4}^1 w^{3/2}\,dw + \int\limits_1^3 \frac{du}{u} \int\limits_{1/3}^2 \frac{dv}{v^{3/2}} \int\limits_{1/4}^1 \frac{dw}{w^{1/2}} =$$

$$= \ln 3 \cdot \frac{2}{5}\left(9\sqrt{3} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{32}\right) =$$

$$= \ln 3 \cdot 2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln 3 \cdot \left(\frac{679}{200}\sqrt{3} - \frac{1631}{1600}\sqrt{2}\right).$$

Очевидно, что формулу (2.2.3) можно применять и в силу теоремы 2.2.5, так как ψ^{-1} непрерывно дифференцируемо на Ω^*. $\triangleleft$

Пример 2.2.4 Найти объем тела G, ограниченного поверхностями: $z = x^2+y^2$, $2(x^2+y^2) = z$, $x = y$, $y = 2x$, $z = h$, $x > 0, y > 0, z > 0$.

$\triangleright$ Проекция тела G на плоскость XOY изображена на рисунке 21.

Множество G можно записать в виде

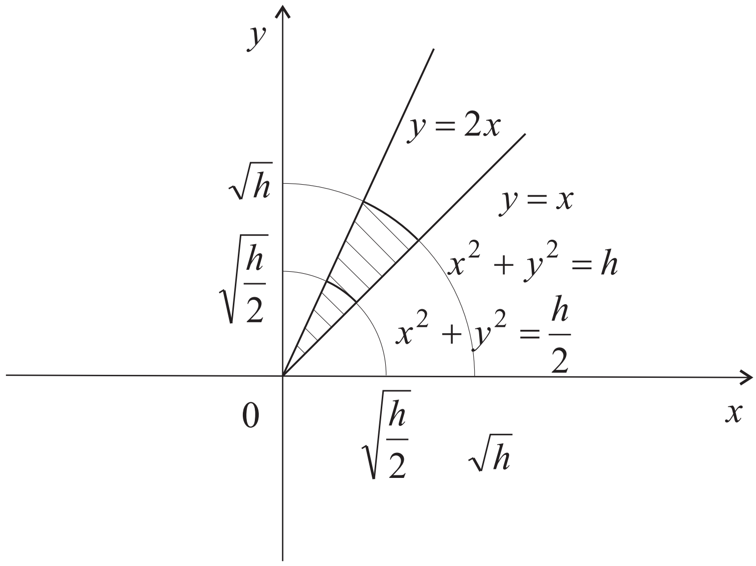

Рисунок 21 – Проекция тела $\boldsymbol{G}$ на плоскость $\boldsymbol{XOY}$

$$G = \{(x, y, z) \,|\, 2x < y < x,\, 0 < x^2 + y^2 < \frac{h}{2},\, x^2 + y^2 < z < 2(x^2 + y^2)\} \cup$$
$$\cup \{(x, y, z) \,|\, 2x < y < x,\, \frac{h}{2} < x^2 + y^2 < h,\, x^2 + y^2 < z < h\}.$$

Отображение φ^{-1}, задаваемое формулами:

$$u = \frac{y}{x},\, v = x^2 + y^2,\, w = \frac{x^2 + y^2}{z},$$

будет биекция G на область

$$G^* = \{(u, v, w) \,|\, 1 < u < 2,\, 0 < v < \frac{h}{2},\, \frac{1}{2} < w < 1\} \cup$$
$$\cup \{(u, v, w) \,|\, 1 < u < 2,\, \frac{h}{2} < v < h,\, \frac{v}{h} < w < 1\}.$$

Биективность φ^{-1} следует из того, что обратное отображение φ будет задаваться формулами:

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1 + u^2}},\, y = \frac{u\sqrt{v}}{\sqrt{1 + u^2}},\, z = wv.$$

Найдем якобиан отображения φ:

$$\det(\varphi^{-1})' = \begin{vmatrix} -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} & 0 \\ 2x & 2y & 0 \\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & -\dfrac{x^2 + y^2}{z^2} \end{vmatrix} = 2\frac{x^2 + y^2}{z^2}\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right) = 2\frac{w^2}{v}(u^2 + 1).$$

Поэтому $\det(\varphi') = \dfrac{v}{2w^2(u^2+1)}$. Таким образом, $\varphi : G^* \to G$ является диффеоморфизмом. Хотя $\det(\varphi') = 0$ при $v = 0$, но φ непрерывно дифференцируемо на $\overline{G}^*$, следовательно по теореме 2.2.5 получим

$$V = \int\limits_1^2 du \int\limits_0^{h/2} dv \int\limits_{1/2}^1 \frac{v}{2w^2(u^2+1)}\, dw + \int\limits_1^2 du \int\limits_{h/2}^{h} dv \int\limits_{v/h}^1 \frac{v}{2w^2(u^2+1)}\, dw =$$

$$= \left(arctg 2 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}(2-1) \cdot \frac{h^2}{8} + \frac{1}{2}\left(arctg 2 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \int\limits_{h/2}^1 \left(\frac{h}{v} - 1\right) v\, dv =$$

$$= \frac{h^2}{8} \cdot \left(arctg 2 - \frac{\pi}{4}\right). \triangleleft$$

Пример 2.2.5 Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $x + y - z = 0$.

$\triangleright$ Тело, ограниченное указанными выше поверхностями, можно записать в виде

$$G = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 \leqslant 2z,\ z \leqslant x + y\}.$$

Отсюда следует, что проекцией данного тела на плоскость XOY является множество $D = \{(x, y) \,|\, (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2\}$. Координаты центра масс (x_0, y_0, z_0) вычисляются по формулам (8.13). Так как уравнения поверхностей симметричны относительно переменных x и y, то тело G будет симметрично относительно плоскости $y = x$, и поэтому $x_0 = y_0$.

Сделаем замену переменных:

$$x = 1 + r\cos\varphi,\ y = 1 + r\sin\varphi,\ z = z.$$

Тогда в новых координатах тело G будет иметь следующий вид: $\{(r, \varphi, z) \,|\, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2},\ 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + \dfrac{r^2}{2} \leqslant z \leqslant$ $\leqslant 2 + r(\sin\varphi + \cos\varphi)\}$. Якобиан равен r.

Масса тела вычисляется по формуле (8.11):

$$m = \iiint\limits_G \rho(x, y, z)\, dxdydz = \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\sin\varphi+\cos\varphi)} dz =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \pi\rho.$$

Вычислим статический момент M_{yz} по формуле (8.12):

$$M_{yz} = \iiint\limits_G x\rho(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\sin\varphi+\cos\varphi)} (1 + r\cos\varphi)\,dz =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r(1 + r\cos\varphi)\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(r - \frac{r^3}{2} + \left(r^2 - \frac{r^4}{2}\right)\cos\varphi\right) dr =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(r - \frac{r^3}{2}\right) dr = \pi\rho.$$

Таким образом, $x_0 = \dfrac{M_{yz}}{m} = 1$.

Находим статический момент относительно плоскости XOY по формуле (8.12):

$$M_{xy} = \iiint\limits_G z\rho(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)+r^2/2}^{2+r(\sin\varphi+\cos\varphi)} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\left(3 + 2r(\sin\varphi + \cos\varphi) + \frac{r^2}{2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= \pi\rho \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\left(3 + \frac{r^2}{2}\right)\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr = \pi\rho \int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(3r - r^3 - \frac{r^5}{4}\right) dr = \frac{5}{3}\pi\rho.$$

Таким образом, $z_0 = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{5}{3}$. Центр масс $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, \dfrac{5}{3})$. $\triangleleft$

Цилиндрические координаты

Рассмотрим отображение $F : (r,\, \varphi,\, z) \to (x,\, y,\, z)$ такое,что

$$x = r\cos\varphi,\;\; y = r\sin\varphi,\;\; z = z, \tag{2.2.4}$$

где $(r,\, \varphi,\, z) \in T = \big\{(r,\, \varphi,\, z)\,|\, r \geqslant 0,\;\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\;\; -\infty < z < \infty\big\}$.

Якобиан отображения (2.2.4) равен r.

Тройку чисел (r, φ, z) называют цилиндрическими координатами точки $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, если они связаны соотношениями (2.2.4). Числа $(r,\, \varphi,\, z)$ имеют простой геометрический смысл. Цилиндрические координаты — это полярные координаты плоскости XOY и обычная декартова координата оси OZ, что изображено на рисунке 22.

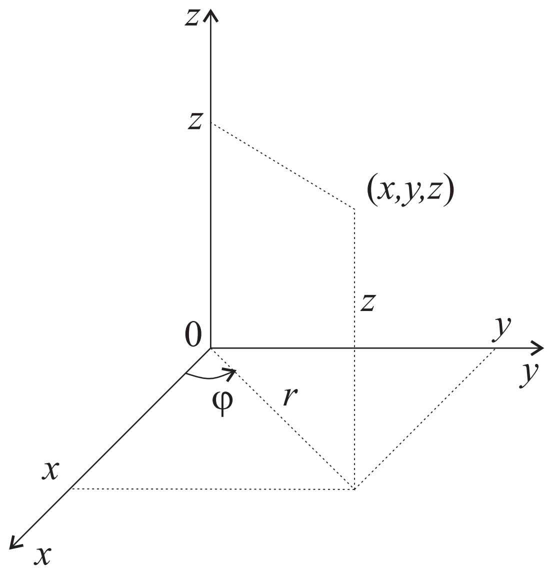

Рисунок 22 – Цилиндрические координаты

Пусть $T_1 = \big\{(r, \varphi, z)\,|\, r = 0,\; 0 \leqslant \varphi < 2\pi,\; -\infty < z < \infty\big\}$, $T_2 = \big\{(r, \varphi, z)\,|\, r > 0,\; \varphi = 0,\; -\infty < z < \infty\big\}$.

Отображение $F : T \to \mathbb{R}^3$ не будет диффеоморфизмом, так как нарушается взаимная однозначность и условие неравенства нулю якобиана на множестве T_1 и, кроме того, множество T не является открытым.

Пусть теперь $T^* = T_1 \cup T_2$. Образом множества T^* при отображении F будет множество $S = \big\{(x,\, y,\, z)\,|\, x \geqslant 0,\; y = 0,\; -\infty < z < \infty\big\}$. Как и множество T^*, так и множество S являются множествами меры нуль $\mathbb{R}^3$. Отображение $F : T \setminus T^* \to \mathbb{R}^3 \setminus S$ есть диффеморфизм.

Пусть теперь G — произвольное измеримое по Жордану множество из T, а $\Omega = F(G) \subset \mathbb{R}^3$ — образ этого множества при отображении F. Предположим, что на $\overline{\Omega}$ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$.

Для множества G возможны два случая:

1) пересечение $G \cap T^* = \emptyset$. В этом случае и $\Omega \cap S = \emptyset$, что дает основание воспользоваться теоремой 2.2.3, из которой и следует следующая

формула:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,drd\varphi dz; \qquad (2.2.5)$$

2) пересечение $G \cap T^* \neq \emptyset$, $\Omega \cap S \neq \emptyset$. Так как G — ограниченное множество, а T^* — множество меры нуль, то $G \cap T^*$ — плоское ограниченное множество в $\mathbb{R}^3$, и поэтому множество $G \cap T^*$ есть множество объема нуль, так же, как и множество $F(G \cap T^*) \subset S$. Это дает право воспользоваться теоремой 2.2.4, из которой опять же следует формула (2.2.5). Подводя итог, можно сказать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.5 *Если измеримое по Жордану множество G координат (r, φ, z) с помощью отображения (2.2.3) переходит в множество Ω координат (x, y, z) и $f(x, y, z)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, тогда справедлива формула (2.2.5).*

Пример 2.2.4 В тройном интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$ перейти к повторным в цилиндрических координатах. Здесь множество Ω ограничено поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\triangleright$ Тело Ω ограничено снизу конической поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, а сверху — параболоидом вращения $z = 6 - x^2 - y^2$. Оно изображено на рисунке 23.

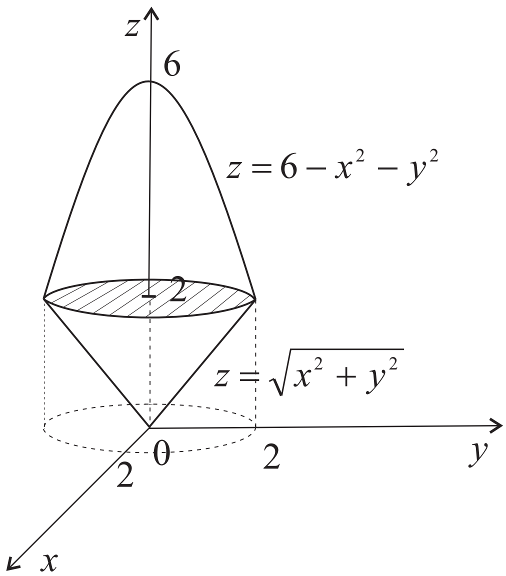

Рисунок 23 – Тело Ω из примера 2.2.4

Проекция на плоскость XY кривой, по которой пересекаются конус и параболоид, находится из системы:

$$\begin{cases} z = 6 - x^2 - y^2, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что $x^2 + y^2 = 4$. Таким образом, множество Ω можно записать в следующем виде: $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z \leqslant 6 - x^2 - y^2\}$.

Переходя к цилиндрическим координатам, получим множество $G = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leqslant r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ r \leqslant z \leqslant 6 - r^2\}$.

Таким образом,

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dr \int\limits_r^{6-r^2} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dz.$$

Если воспользоваться теоремой 2.2.2, то

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_0^6 dz \iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\, dxdy,$$

где $D_z = D_z' \cup D_z''$, $D_z' = \{(x, y) \mid 0 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant z,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$, $D_z'' = \{(x, y) \mid 0 \leqslant 6 - x^2 - y^2 \leqslant z,\ 2 \leqslant z \leqslant 6\}$.

Переходя к цилиндрическим координатам, получим

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr +$$

$$+ \int\limits_2^6 dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\sqrt{6-z}}^{\sqrt{6}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, dr =$$

$$= \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z dr \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d\varphi +$$

$$+ \int\limits_2^6 dz \int\limits_{\sqrt{6-z}}^{\sqrt{6}} dr, \int\limits_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\, r\, d\varphi. \triangleleft$$

Сферические координаты

Рассмотрим отображение $F : (r, \varphi, \psi) \to (x, y, z)$, задаваемое формулами:

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\ y = r\sin\varphi\cos\psi,\ z = r\sin\psi, \tag{2.2.6}$$

где $(r, \varphi, \psi) \in T = \{(r, \varphi, \psi) \mid 0 \leqslant r < \infty,\ -\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\}$.

Якобиан отображения (2.2.6) равен $r^2 \cos\psi$.

Тройку чисел (r, φ, ψ) называют сферическими координатами точки $(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3$, если они связаны соотношениями (2.2.6). Сферические координаты (r, φ, ψ) имеют простой геометрический смысл: r — расстояние от начала координат до точки $M(x, y, z)$, ψ — угол между плоскостью XY и вектором OM (широта), φ — полярный угол проекции точки M на плоскость XY (долгота), т. е. угол между положительным направлением оси OX и вектором OM', что изображено на рисунке 24.

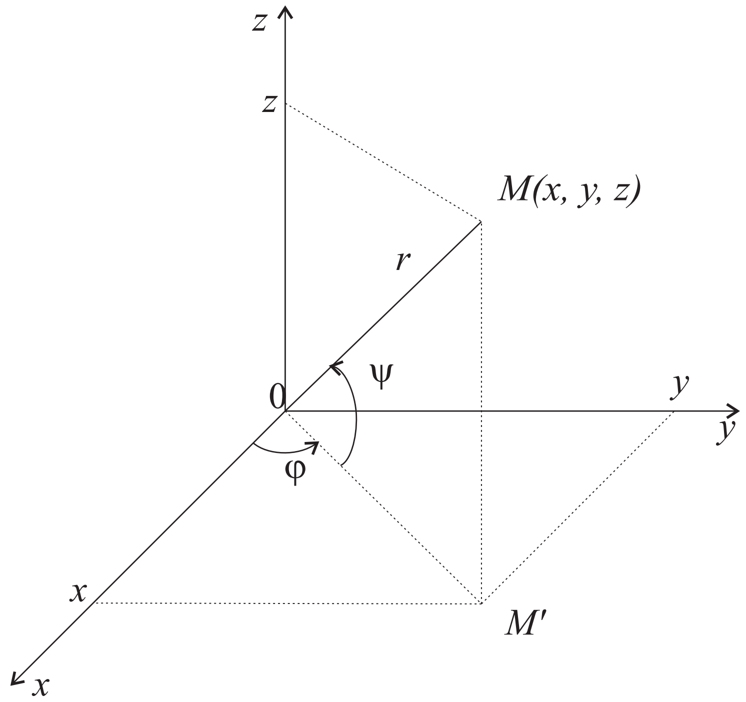

Рисунок 24 – Сферические координаты

Пусть

$$T_1 = \{(r, \varphi, \psi) \,|\, r = 0,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\} \cup$$

$$\cup \{(r, \varphi, \psi) \,|\, r > 0,\ \psi = -\frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\} \cup$$

$$\cup \{(r, \varphi, \psi) \,|\, r > 0,\ \psi = \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi\},$$

$$T_2 = \{(r, \varphi, \psi) \,|\, r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},\ \varphi = 0\}.$$

Отображение $F : T \to \mathbb{R}^3$ не будет диффеоморфизмом, так как нарушается взаимная однозначность и условие неравенства нулю якобиана на множестве T_1, и множество T не является открытым. Пусть $T^* = T_1 \cup T_2$. Образом множества T^* при отображении F будет множество $S = F(T^*) = \{(x,\ y,\ z) \,|\, 0 \leqslant x < \infty,\ y = 0,\ -\infty < z < \infty\}$. Отображение $F : T \setminus T^* \to \mathbb{R}^3 \setminus S$ есть диффеоморфизм, а множества T^* и S

являются множествами меры нуль. Дальше, рассуждая совершенно аналогично случаю полярных и цилиндрических координат, делаем вывод, что имеет место следующая теорема перехода в тройном интеграле от декартовых координат к сферическим (замена переменной).

Теорема 2.2.6 *Пусть отображение (2.2.6) переводит множество, измеримое по Жордану G координат (r, φ, ψ), в множество Ω координат (x, y, z), и $f(x, y, z)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$, тогда*

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{G} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi) r^2 \cos\psi \, drd\varphi d\psi.$$

Пример 2.2.5 В интеграле $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz$ перейти к повторному в сферических координатах, где множество Ω ограничено поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

$\triangleright$ После перехода к сферическим координатам поверхность запишется в виде $r^4 = a^2 r^2 \cos 2\psi$. Тогда множество G имеет вид $G = \{(r, \varphi, \psi) \mid 0 \leqslant \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant a^2 \cos 2\psi,\ -\dfrac{\pi}{4} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{4}\}$.

Окончательно получаем следующее:

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\psi \int\limits_{0}^{a^2\cos 2\psi} f(r\cos\varphi\cos\psi, r\sin\varphi\cos\psi, r\sin\varphi) r^2 \cos\psi \, dr.$$

Заметим, что область Ω получена вращением кривой $(y^2 + z^2)^2 = = a^2(y^2 - z^2)$ $(r = a\sqrt{\cos 2\psi})$ относительно оси OZ. $\triangleleft$

Обобщенные цилиндрические координаты

Обобщенными цилиндрическими координатами точки $(x,\ y,\ z)$ называется тройка $(r,\ \varphi,\ z)$, связанная с $(x,\ y,\ z)$ формулами:

$$x = ar\cos^{\alpha}\varphi,\ \ y = br\sin^{\alpha}\varphi,\ \ z = z, \tag{2.2.7}$$

при этом $r \geqslant 0$, $-\infty < z < \infty$, а угол φ удовлетворяет тем же условиям, что и при переходе к обобщенным полярным координатам: $\varphi \in [0, 2\pi)$ $[-\pi, \pi)$ или $\varphi \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Якобиан отображения (2.2.7) при переходе к обобщенным цилиндрическим координатам равен $ab\alpha r\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi$.

Пример 2.2.6 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью
$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0.$$

$\triangleright$ Перейдем к обобщенным цилиндрическим координатам, полагая $\alpha=2$. После подстановки координат получим
$$r^2+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Отсюда $0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2}$ и $0\leqslant r\leqslant 1$.

Функции $\cos^2\varphi$ и $\sin^2\varphi$ имеют смысл при любом $\varphi\in[0,2\pi)$, но, чтобы их значения не повторялись, необходимо выполнение условия $\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$. Таким образом, множество точек $(r,\,\varphi,\,z)$, принадлежащих данному телу, имеет следующий вид:
$$\{(r,\,\varphi,\,z)\,|\,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant z\leqslant c\sqrt{1-r^2}\}.$$

Тогда получим
$$V=\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^1 dr\int\limits_0^{c\sqrt{1-r^2}}2ab\sin\varphi\cos\varphi dz=$$
$$=2ab\int\limits_0^{\pi/2}\sin\varphi d(\sin\varphi)\int\limits_0^1 r\,dr\int\limits_0^{c\sqrt{1-r^2}}dz=$$
$$=ab\sin^2\varphi\Big|_0^{\pi/2}\int\limits_0^1 cr\sqrt{1-r^2}\,dr=\frac{abc}{3}\,(1-r^2)^{3/2}\Big|_1^0=abc.\triangleleft$$

Обобщенные сферические координаты

Обобщенными сферическими координатами точки $(x,\,y,\,z)$ называется тройка $(r,\,\varphi,\,\psi)$, связанная с $(x,\,y,\,z)$ формулами:
$$x=ar\cos^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\ \ y=br\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\psi,\ \ z=cr\sin^\beta\psi, \tag{2.2.8}$$
при этом $r\geqslant 0$, угол $\varphi\in[0,2\pi)$ $[-\pi,\pi)$ или $\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ в зависимости от постоянной α так, чтобы функции $\cos^\alpha\varphi$ и $\sin^\alpha\varphi$ имели смысл, и оба равенства $\sin^\alpha\varphi_0=\sin^\alpha\varphi_1$, $\cos^\alpha\varphi_0=\cos^\alpha\varphi_1$ одновременно выполнялись только при $\varphi_0=0$ и $\varphi_1=2\pi$ $(\varphi_0=-\pi,\ \varphi_1=\pi)$ или $\varphi_0=0,\ \varphi_1=\dfrac{\pi}{2}$. Угол $\psi\in[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ или $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ в зависимости от параметра β аналогично

случаю угла φ.

Якобиан отображения (2.2.8) при переходе к обобщенным сферическим координатам равен $abc\alpha\beta r^2\cos^{\alpha-1}\varphi\sin^{\alpha-1}\varphi\sin^{\beta-1}\psi\cos^{2\beta-1}\psi$. Если хотя бы один из параметров $\alpha<1$, $\beta<1$, то будут нарушаться требования биективности и непрерывной дифференцируемости отображения. В этом случае после замены переменных может получиться несобственный тройной интеграл от неограниченной функции по ограниченному измеримому по Жордану множеству. По теореме 7.4 о замене переменных в несобственном интеграле этот интеграл сходится и равен повторному, причем интеграл по φ может оказаться несобственным ($\alpha<1$) так же, как и интеграл по ψ ($\beta<1$).

Пример 2.2.7 Переходя к обобщенным сферическим координатам, найти объем тела, ограниченного поверхностью $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}\right)^2=\dfrac{x}{h}+\dfrac{y}{k}$ $(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$.

$\triangleright$ Положим $x=ar\cos^2\varphi\cos^2\psi, y=br\sin^2\varphi\cos^2\psi, z=cr\sin^2\psi$. Якобиан отображения перехода к обобщенным сферическим координатам равен $4abcr^2\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi\cos^3\psi$. После замены переменных уравнение поверхности запишется в виде

$$r=\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi. \tag{2.2.9}$$

Так как $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, то для того, чтобы точки (x,y,z) не повторялись при изменении φ и ψ достаточно положить $\varphi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$ и $\psi\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$. Уравнение (2.2.9) никаких дополнительных условий на φ и ψ не налагает.

Таким образом, прообразом тела при переходе к обобщенным сферическим координатам является следующее множество:

$$\left\{(r,\varphi,\psi)\,|\,0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant\psi\leqslant\frac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi\right\}.$$

Переходя к повторным интегралам, имеем

$$V=4abc\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}d\psi\int\limits_0^{\left(a/h\,\cos^2\varphi+b/k\,\sin^2\varphi\right)\cos^2\psi}r^2\cos\varphi\sin\varphi\sin\psi\cos^3\psi\,dr=$$

$$=4abc\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\psi\cos^3\psi\,\frac{1}{3}\left(\frac{a}{h}\cos^2\varphi+\frac{b}{k}\sin^2\varphi\right)^3\times$$

$$\times \cos^6\psi\, d\psi = \frac{2}{3}\cdot abc\cdot \frac{1}{4}\,\frac{\bigl(a/h-(a/h-b/k)\sin^2\varphi\bigr)^4}{ah-bk}\Bigg|_{\pi/2}^{0}\times$$

$$\times\left(-\frac{1}{10}\cos^{10}\psi\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{60}\cdot abc\cdot\frac{(a/h)^4-(b/k)^4}{ah-bk} =$$

$$= \frac{1}{60}\cdot abc\cdot\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\cdot\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right).\triangleleft$$

2.3 Исследование несобственных двойных и тройных интегралов

Пример 2.3.1 Исследовать на сходимость интеграл

$$\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,$$

где $D = \{(x,y)\,|\,x \geqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

$\triangleright$ Воспользуемся определением 7.2. Для этого возьмем два исчерпания множества D: последовательности

$$D_m^1 = \{(x,y)\,|\,1 \leqslant x \leqslant m,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$$

и

$$D_m^2 = D_m^1 \cup \{(x,y)\,|\,m \leqslant x \leqslant 2m,\ -1 \leqslant y < 0\},$$

которые изобразим на рисунках 25 и 26 соответственно.

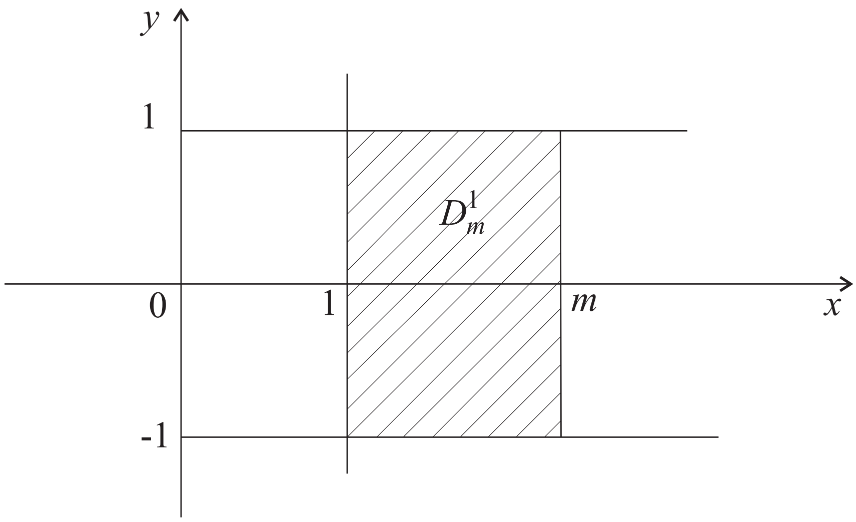

Рисунок 25 – Множество D_m^1

Поскольку функция $f(x,y) = \dfrac{y}{x} \in \Re(D_m^1)$ и $f(x,y) \in \Re(D_m^2)$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{D_m^1} \frac{y}{x}\,dxdy = \lim_{m\to\infty} \int\limits_1^m \frac{dx}{x} \int_{-1}^1 y\,dy = 0,$$

а

$$\lim_{m\to\infty} \iint\limits_{D_m^2} \frac{y}{x}\,dxdy = \lim_{m\to\infty} \Big[\iint\limits_{D_m^1} \frac{y}{x}\,dxdy + \int\limits_m^{2m} \frac{dx}{x} \int\limits_{-1}^{0} y\,dy \Big] = -\frac{1}{2}\ln 2.$$

На основании определения 7.2 заключаем, что из того, что пределы по двум исчерпаниям различны, следует расходимость интеграла. $\triangleleft$

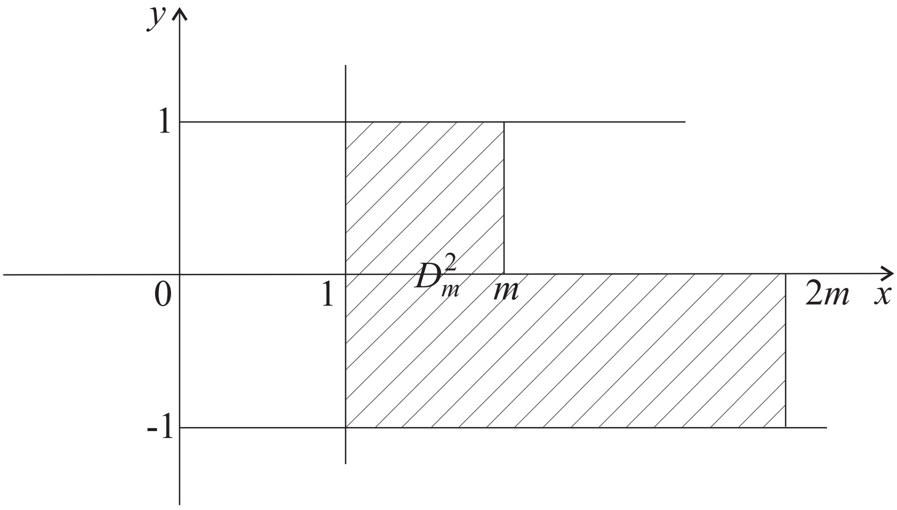

Рисунок 25 – Множество D_m^2

Пример 2.3.2 Исследовать на сходимость интеграл

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{f(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dxdydz,$$

где множество $\Omega = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \geqslant R^2 > 0\}$ и $f \in C(\Omega)$, причем $0 < M_1 \leqslant |f(x,y,z)| \leqslant M_2$.

$\triangleright$ Из условия следует, что

$$\frac{M_1}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{|f(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \leqslant \frac{M_2}{(x^2+y^2+z^2)^p}.$$

Поэтому по мажорантному признаку сходимости (теорема 7.2) исходный интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом $\iiint\limits_{\Omega} \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$. Подынтегральная функция положительна, поэтому можно рассмотреть наиболее удобную здесь последовательность исчерпаний $\{\Omega_m\}$ множества Ω

$$\Omega_m = \{(x,y,z)\,|\,R^2 < x^2+y^2+z^2 < m^2\}.$$

Переходя на множестве $\{\Omega_m\}$ к сферическим координатам, получим, что

$$\iiint\limits_{\Omega_m} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} == \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int\limits_R^m \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int\limits_R^m \frac{dr}{r^{2p-2}},$$

следовательно,

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \lim_{m\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_m} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} 4\pi \int\limits_R^m \frac{dr}{r^{2p-2}} = 4\pi \int\limits_R^\infty \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

Последний интеграл сходится при $p > \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \leqslant \dfrac{3}{2}$, следовательно, и исходный интеграл сходится при $p > \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \leqslant \dfrac{3}{2}$. $\triangleleft$

Пример 2.3.3 Исследовать на сходимость интеграл

$$\iiint\limits_\Omega \frac{f(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p}\, dxdydz,$$

где множество $\Omega = \{(x,y,z)\,|\, x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$ и $f \in C(\Omega)$, причем $0 < M_1 \leqslant |f(x,y,z)| \leqslant M_2$.

$\triangleright$ Повторяя рассуждения, проведенные при решении предыдущего примера, делаем вывод, что исходный интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом $\iiint\limits_\Omega \dfrac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$.

Исчерпание множества Ω зададим множествами:

$$\Omega_m = \{(x,y,z)\,|\, \frac{1}{m^2} < x^2+y^2+z^2 < R^2\}.$$

Переходя на множестве $\{\Omega_m\}$ к сферическим координатам, получим, что

$$\iiint\limits_{\Omega_m} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} == \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos\psi\, d\psi \int\limits_{1/m}^{R} \frac{dr}{r^{2p-2}},$$

следовательно,

$$\iiint\limits_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = \lim_{m\to\infty} \iiint\limits_{\Omega_m} \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} = 4\pi \int\limits_0^R \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

Откуда получаем, что исходный интеграл сходится при $p < \dfrac{3}{2}$ и расходится при $p \geqslant \dfrac{3}{2}$. $\triangleleft$

3 Задания для самостоятельной работы

3.1 Двойной интеграл

3.1.1 Вычислить повторные интегралы:

1) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_1^2 xy^2\,dy$;

2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 e^{x-y}\,dx$;

3) $\int\limits_{-1}^1 dy \int\limits_1^2 \frac{y}{x^3}\,dx$;

4) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_3^4 \frac{dy}{(x+y)^2}$.

5) $\int\limits_{-\pi/2}^0 dy \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dx$;

6) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 \frac{x^2dy}{1+y^2}$;

7) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$;

8) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 \frac{x^2dy}{\sqrt{1-y^2}}$;

9) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 \frac{ydy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$;

10) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 x^2y\,e^{xy}\,dy$.

3.1.2 Для заданного множества D записать интеграл $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ в виде повторных интегралов с разными порядками интегрирования:

1) D — треугольник с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$;

2) D — множество, ограниченное кривыми $y=x^2$ и $x+y=2$;

3) D — множество, ограниченное кривыми $x=-\sqrt{2-y}$, $x=0$, $x=-\sqrt{y}$;

4) D — множество, ограниченное кривыми $x=0$, $x=\sin y$, $x=\cos y$ $(0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2})$;

5) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant x\}$;

6) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 4x,\ y \geqslant x\}$;

7) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \geqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$;

8) $D=\{(x,y) \mid y^2 \leqslant x+2,\ y \geqslant x\}$;

9) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ x+y-1 \leqslant 0,\ x+y+1 \geqslant 0\}$;

10) $D=\{(x,y) \mid x^2+y^2 \geqslant R^2,\ x^2+y^2 \leqslant 2Rx,\ y \geqslant 0\}$.

3.1.3 Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1) $\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy$;

2) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2+y} f(x,y)\,dx$;

3) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^4}^{x^2} f(x,y)\,dy$;

4) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{0{,}5y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)\,dx$;

5) $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$;

6) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_{\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\,dx$;

7) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{lnx}^{3x} f(x,y)\,dy$;

8) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{(x-1)^2}^{\sqrt{5-x^2}} f(x,y)\,dy$;

9) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y/2}^{2y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx$;

10) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2/9}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^3 dy \int\limits_{y^2/9}^{1} f(x,y)\,dx$.

3.1.4 Вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_D x^2 y^2\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $x = y^2$ и $x = 1$;

2) $\iint\limits_D (x+2y)\,dxdy$, D — множество, ограниченное прямыми $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, $x = 3$;

3) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant R^2,\ y \geqslant x\}$;

4) $\iint\limits_D x\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2,\ x^2-y^2 \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$;

5) $\iint\limits_D y\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 1,\ x+y-1 \leqslant 0,\ y \geqslant 0\}$;

6) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $x = \sin y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = \pi$;

7) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $y = x^2-1$,

$y = 1 - x$, $x = 0$;

8) $\iint\limits_D xy\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $y = x^2$, $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$;

9) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $xy = 1$, $x = 2$, $x - y = 0$;

10) $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dxdy$, D — множество, ограниченное кривыми $y = x^2$, $y^2 = x$.

3.1.5 В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде одного из повторных:

1) $D = \{(x, y) \mid a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2,\ a < b\}$;

2) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ y \leqslant 0\}$;

3) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2ax\}$;

4) D — треугольник с вершинами $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$;

5) $D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2)^2 \leqslant a^2(x^2 - y^2),\ x \geqslant 0\}$;

6) D — множество, лежащее внутри окружности $x^2+y^2 = 1$ и вне кривой $r = \cos 3\varphi$;

7) D — множество, лежащее вне окружности $x^2 + y^2 = a^2$ и внутри кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$;

8) $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 2,\ y \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\}$;

9) $D = \{(x, y) \mid \dfrac{1}{4}x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x\}$;

10) $D = \{(x, y) \mid (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1,\ x + y \geqslant 0\}$.

3.1.6 Вычислить двойные интегралы, перейдя к повторным:

1) $\iint\limits_D x\,y^2\,dxdy$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x \geqslant 0\}$;

2) $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant ay\};$

3) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\};$

4) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2,\ x-y\leqslant 0\};$

5) $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,\ x>y\};$

6) $\iint\limits_D \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,\ x^2+y^2\leqslant 2y\};$

7) $\iint\limits_D \sqrt{y}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\};$

8) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid (x^2+y^2)^2\leqslant 2xy,\ x\geqslant 0\};$

9) $\iint\limits_D x\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x,\ y\geqslant 0\};$

10) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid y\leqslant x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0\}.$

3.1.7 Сделав подходящую замену переменных, вычислить интегралы:

1) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ \alpha x\leqslant y\leqslant \beta x,\ a\geqslant 0\};$

2) $\iint\limits_D \dfrac{(x+y)^2}{x}\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid 1-x\leqslant y\leqslant 3-x,\ \dfrac{x}{2}\leqslant y\leqslant 2x\};$

3) $\iint\limits_D y^2\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid 1\leqslant xy\leqslant 3,\ 0<x\leqslant y\leqslant 2x\};$

4) $\iint\limits_D (x^3+y^3)\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant 3x^2,\ \dfrac{1}{x}\leqslant 2y\leqslant \dfrac{3}{x}\};$

5) $\iint\limits_D xy(x+y)\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x-y\leqslant 1,\ \dfrac{1}{x}\leqslant y\leqslant \dfrac{2}{x}\};$

6) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x^3\leqslant y\leqslant 2x^3,\ x\leqslant 2y\leqslant 6x\};$

7) $\iint\limits_D xy(x+y)dxdy,\ D=\{(x,y)\mid x-1\leqslant y\leqslant x+1,\ -x-1\leqslant y\leqslant -x+1\};$

8) $\iint\limits_D (x^4 - y^4)\,dxdy,\ D = \{(x, y) \mid 1 \leqslant xy \leqslant 2,\ 1 \leqslant x^2 - y^2 \leqslant 2,\ x > 0\};$

9) $\iint\limits_D \frac{x}{y}\,dxdy,$ D — множество, ограниченное параболами $y = x^2$, $8y = x^2$, $x = y^2$, $8x = y^2$;

10) $\iint\limits_D xydxdy,\ D = \{(x, y) \,|\, ax^3 \leqslant y \leqslant bx^3,\ px \leqslant y^2 \leqslant qx\}.$

3.2 Тройной интеграл

3.2.1 Расставить всеми возможными способами пределы интегрирования в следующих тройных интегралах, предполагая, что $f(x, y, z)$ непрерывна в соответствующей области:

1) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+1} f(x,y,z)\,dz;$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz;$

3) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{4-x} dy \int\limits_0^{4-x-y} f(x,y,z)\,dz;$

4) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz;$

5) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-x/2} dy \int\limits_0^{2-y-x/2} f(x,y,z)\,dz;$

6) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} f(x,y,z)\,dz;$

7) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz;$

8) $\int\limits_0^a dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^h f(x,y,z)\,dz;$

9) $\int\limits_{-R}^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz;$

10) $\int\limits_0^R dz \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int\limits_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx.$

3.2.2 Вычислить следующие тройные интегралы, перейдя к повторным в декартовых координатах:

1) $\iiint\limits_G x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$;

2) $\iiint\limits_G \dfrac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$, G — множество, ограниченное плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

3) $\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное плоскостями $2x + y + z = 4$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

4) $\iiint\limits_G (x + z)\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное плоскостями $x + y = 1$, $x - y = 1$, $x + z = 1$, $x = 0$, $z = 0$;

5) $\iiint\limits_G x\,y\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

6) $\iiint\limits_G x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$, G — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$;

7) $\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями $2x + z = 2a$, $x + z = a$, $y^2 = ax$, $y = 0$ $(y \geqslant 0)$;

8) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$;

9) $\iiint\limits_G x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$;

10) $\iiint\limits_G (x^2 - z^2)\,dx\,dy\,dz$, G — множество, ограниченное поверхностями

$y = -x$, $z = x$, $z = y$, $z = 1$.

3.2.3 В интеграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ **перейти к цилиндрическим координатам и записать в виде одного из повторных:**

1) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$;

2) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H,\ x \geqslant 0\}$;

3) $G = \{(x,y,z) \mid \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{z}{4} \leqslant 1,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$;

4) $G = \{(x,y,z) \mid \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \leqslant z \leqslant 2\}$;

5) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az,\ x^2 + y^2 \leqslant z^2\}$;

6) $G = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$;

7) $G = \{(x,y,z) \mid ay \geqslant z^2 + x^2,\ y^2 \leqslant z^2 + x^2\}$;

8) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4R^2,\ z \geqslant R\}$;

9) $G = \{(x,y,z) \mid a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2,\ x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0,\ x \geqslant 0\}$;

10) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0,\ x^2 + y^2 + z \leqslant 2\}$.

3.2.4 В интеграле $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ **перейти к сферическим координатам и записать в виде одного из повторных:**

1) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0\}$;

2) $G = \{(x,y,z) \mid a^2 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2,\ y \geqslant 0\}$;

3) $G = \{(x,y,z) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$;

4) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0,\ x + y \geqslant 0\}$;

5) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant \dfrac{R}{3}\}$;

6) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ 0 \leqslant z \leqslant H,\ H \geqslant R\}$;

7) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,\ x^2 + y^2 \geqslant 3z^2\}$;

8) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2yR,\ x^2 + y^2 \geqslant z^2\}$;

9) $G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2zR\}$;

10) $G = \{(x, y, z) \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} \geqslant 1,\ x \geqslant 0, y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$.

3.2.5 Вычислить следующие тройные интегралы, используя подходящую замену переменных:

1) $\iiint\limits_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 8\}$;

2) $\iiint\limits_G \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1\}$;

3) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,$ $0 \leqslant z \leqslant H\}$;

4) $\iiint\limits_G (x + y + z)\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0,$ $x + y + z \leqslant 2\}$;

5) $\iiint\limits_G (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2,$ $y^2 + z^2 \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\}$;

6) $\iiint\limits_G z\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid z^2 \geqslant \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2),\ 0 \leqslant z \leqslant h\}$;

7) $\iiint\limits_G z\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,\ z \geqslant 0\}$;

8) $\iiint\limits_G \frac{|xy|}{z^2}\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < z < \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$;

9) $\iiint\limits_G \frac{dx\, dy\, dz}{(x + y)(x + y + z)}$, $G = \{(x, y, z) \mid 1 < x < 2,\ 1 < x + y < 3,$ $1 < x + y + z < 5\}$;

10) $\iiint\limits_G x\, y\, z\, dx\, dy\, dz$, $G = \{(x, y, z) \mid x < yz < 2x,\ y < zx < 2y,$ $z < xy < 2z\}$.

3.3 Приложения двойных и тройных интегралов

3.3.1 С помощью двойного интеграла найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми:

1) $y^2 = 10x + 25$, $y^2 = 9 - x$;

2) $x^2 + y^2 = 4$, $y^2 = 4 - 4x$, $x < 1$;

3) $xy = a^2$, $x + y = \dfrac{5}{2}a$;

4) $(x^2 + y^2)^3 = 2ax^3$;

5) $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$;

6) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$, $x^2 + y^2 = a^2$ $(\sqrt{x^2 + y^2} \geqslant a > 0)$;

7) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\right)^2 = \dfrac{xy}{c^2}$;

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{h} + \dfrac{y}{k}$;

9) $\sqrt[4]{\dfrac{x}{a}} + \sqrt[4]{\dfrac{y}{b}} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $(x > 0,\ y > 0)$;

10) $\dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} = \dfrac{x^2y}{c}$.

3.3.2 Найти площадь поверхности:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$, если $x^2 + y^2 \leqslant z^2$;

2) $az = xy$, если $x^2 + y^2 \leqslant a^2$;

3) $z = x^2$, если $x + y \leqslant \sqrt{2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

4) $2az = x^2 + y^2$, если $(x^2 + y^2)^2 \leqslant a^2(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$;

5) $2az = x^2 + y^2$, если $x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $y \leqslant x$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $x + y \leqslant R$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $(x^2 + y^2)^2 \leqslant 2a^2xy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

8) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$ $b \leqslant a$;

9) $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = 2z$, если $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$;

10) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = 4v$, если $z \geqslant 0$, $x^2 + y^2 \leqslant 9$.

3.3.3 С помощью двойного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями:

1) $x^2 + y^2 = ax$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

2) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$;

3) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $z = 0$, $x > 0$, $y > 0$;

4) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$;

5) $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $cz = xy$, $z = 0$, $x > 0$, $y > 0$;

7) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z > \sqrt{x^2 + y^2}$;

8) $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

9) $x^2 + y^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = ax$, $z = 0$, $bz = x^2y^2$;

10) $z = x^{3/2} + y^{3/2}$, $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

3.3.4 Найти координаты центра масс плоской фигуры с постоянной плотностью $\rho = 1$, ограниченной кривыми:

1) $x = \dfrac{y^2}{a}$, $x = 2a - y$;

2) $y = x^2$, $y = 3x^2$, $y = 3x$;

3) $y = 2x - 1$, $y^2 = x$;

4) $y = 4 - x^2$, $y = 2x + 4$;

5) $y = \sqrt{2x - x^2}$, $y = 0$;

6) $ay = x^2$, $x + y = 2a$;

7) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;

9) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $y \geqslant 0$;

10) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $3x + 2y = 6$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

3.3.5 Найти моменты инерции относительно координатных осей и относительно начала координат плоской фигуры с постоянной плотностью $\rho = 1$, ограниченной кривыми:

1) $ay = x^2$, $x + y = 2a$;

2) $x^2 = 2py$, $y^2 = 2px$;

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$;

4) $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, $x = 0$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$;

5) $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $x = 2y$, $2x = y$, $x > 0$, $y > 0$;

6) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{c} = 1$, $\dfrac{x}{b} + \dfrac{y}{c} = 1$, $y = 0$, $a > b > 0$, $c > 0$;

7) $(x^2 + y^2)^2 = 2axy$, $x > 0$, $y > 0$;

8) $x^2 + y^2 = 8$, $x - y = 0$, $y = \sqrt{3}x$;

9) $y = x^2 + 1$, $x - y + 3 = 0$;

10) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

3.3.6 С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = x^2$;

2) $z = x + y$, $z = xy$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

3) $x = a$, $y = b$, $z^2 = xy$;

4) $z = xy$, $x + y = 1$, $z = 0$;

5) $x + y + z = a$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = ax$;

6) $y = x^2$, $4x + y = a$, $4x + 3y = 3a$, $y = 0$, $z = 0$;

7) $z = xy$, $z = x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$;

8) $y^2 = 4x + 4$, $y^2 = -2x + 4$, $z = 0$, $z = 3$;

9) $y = 1 - x^2$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $z = 0$, $z = 6$.

10) $y^2 + z^2 = x$, $x = y$.

3.3.7 Пользуясь подходящей заменой переменных, вычислить объем тела, ограниченного следующими поверхностями:

1) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$;

2) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = az(x^2 + y^2)$;

3) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$;

4) $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 + a^2 = 2z^2$, $a > 0$, $(z > 0)$;

5) $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = z^2 + y^2$, $z = 0$;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$, $z = 0$;

7) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{xyz}{h^3}$;

8) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x}{h}$;

9) $\left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2}$;

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$, $c > 0$.

3.3.8 Найти массу тела с плотностью ρ, ограниченного поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 6$, $z \geqslant 0$, $\rho = z$;

2) $z = x^2 + y^2$, $z = 4$, $\rho = x^2 + y^2 + z$;

3) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9}$, $z = 3$, $\rho = x^2$;

4) $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2px$, $x = \dfrac{p}{2}$, $z = 0$, $\rho = const$;

5) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $(z \geqslant 0)$, $\rho = const$;

6) $x = y^2$, $x = 4$, $z = 2$, $z = 5$, $\rho = |y|$;

7) $z^2 = x^2 + y^2$, $z = 6 - x^2 - y^2$, $z \geqslant 0$, $\rho = z$;

8) $by = x^2 + z^2$, $y = b$, $\rho = x^2 + z^2$;

9) $x^2 + y^2 = 2x$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $\rho = const$;

10) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$, $\rho = x^2 + y^2 + z^2$.

3.3.9 Найти координаты центра масс тела с плотностью ρ, ограниченного поверхностями:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = c$, $z > 0$, $\rho = const$;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$, $y \geqslant 0$, $\rho = x^2 + y^2 + z^2$;

3) $x^2 + y^2 = cz$, $z = 0$, $z = c$, $\rho = x^2 + y^2 + z$;

4) $x^2 + y^2 = 3z^2$, $z = H$, $z > 0$, $\rho = const$;

5) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$, $(x > 0,\ y > 0)$, $\rho = const$;

6) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$, $\rho = const$;

7) $z = x^2 + y^2$, $z = h$, $\rho = \sqrt{h - z}$;

8) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = h$, $\rho = z^2$;

9) $z = x^2 + y^2$, $2z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x + y = \pm 1$, $\rho = const$;

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\rho = const$.

3.3.10 Найти момент инерции относительно координатной оси однородного тела с постоянной плотностью $\rho = 1$, ограниченного заданными поверхностями:

1) $z = x^2 + y^2$, $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$, $z = 0$ относительно оси OZ;

2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z > 0)$ относительно оси OZ;

3) $z = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $z = 1$ относительно оси OX;

4) $cz = x^2 + y^2$, $z = c$ относительно оси OZ;

5) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$ относительно оси OZ;

6) $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ относительно всех координатных осей;

7) $z = \dfrac{H}{R}(R - \sqrt{x^2 + y^2})$, $z = 0$ относительно всех координатных осей;

8) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z = 0$, $(z \geqslant 0)$ относительно всех координатных осей;

9) $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $x^2 + y^2 = 2z$ относительно оси OZ;

10) $x + y + z = 2$, $z = 0$, $3x + 2y = 6$, $x^2 + y^2 = 2$, $(z \geqslant 0)$ относительно

оси OZ.

3.3.11 Найти моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела с постоянной плотностью $\rho = 1$, ограниченного заданными поверхностями:

1) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

2) $2x + 3y = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 4$;

3) $ax = y^2 + z^2$, $x = a$;

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

5) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = 0$;

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x}{a}$;

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$, $z = 1$, $z \geqslant 0$;

8) $y^2 = az$, $z = a$, $x = 0$, $x = a$;

9) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xy$, $x > 0$, $y > 0$ относительно плоскости XOY;

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2\dfrac{z}{c}$, $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c}$.

3.3.12 Найти ньютонов потенциал или силу притяжения:

1) Найти ньютонов потенциал в точке M_0, создаваемый шаром с плотностью $\rho = const$ и радиусом R;

2) Найти ньютонов потенциал в точке $P(0,0,z)$ цилиндра $\xi^2+\eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$ с плотностью $\rho = const$;

3) Найти в точке $P(0,0,h)$ ньютонов потенциал полушара $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leqslant R^2$, $z \geqslant 0$ с плотностью $\rho = const$;

4) Найти ньютонов потенциал в центре основания цилиндра с радиусом R, высотой H и плотностью $\rho = const$;

5) Найти ньютонов потенциал в центре эллипсоида $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$ с плотностью $\rho = const$;

6) Найти силу притяжения материальной точки M массы m шаром радиуса R с плотностью $\rho = const$;

7) Найти силу, с которой цилиндр с плотностью $\rho = const$, высотой H и радиусом R притягивает точку массы m, расположенную в центре основания цилиндра;

8) Найти силу, с которой конус с плотностью $\rho = const$, высотой H и радиусом R притягивает точку массы m, расположенную в вершине конуса;

9) Найти силу притяжения однородным цилиндром $\xi^2 + \eta^2 \leqslant a^2$, $0 \leqslant \zeta \leqslant h$ с плотностью $\rho = const$, точки $P(0,0,z)$ единичной массы;

10) Из материального шара радиуса R с плотностью $\rho = const$ вырезан шаровой сектор с углом в осевом сечении 2α. Найти силу, с которой этот сектор притягивает точку массы m, расположенную в его вершине.

3.4 Несобственные интегралы

3.4.1 Вычислить интегралы или установить их расходимость:

1) $\iint\limits_D \frac{y^3}{x}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x > 1,\ -2 < y < 2\}$;

2) $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x > 1,\ -1 < xy < 1\}$;

3) $\iint\limits_D \frac{|x|dxdy}{(1+x^2+y^2)^2}$, $D = \mathbb{R}^2$;

4) $\iint\limits_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x > 0,\ 0 < xy < 1\}$;

5) $\iint\limits_D e^{-(x+y)}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid 0 < x < y\}$;

6) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 2y\}$;

7) $\iint\limits_D ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$;

8) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$;

9) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2x\}$;

10) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^4+y^2}$, $D = \{(x,y) \mid y \geqslant x^2+1\}$.

3.4.2 Исследовать на сходимость интегралы:

1) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy$;

2) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^4+y^4)^p}$;

3) $\iint\limits_D \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$;

4) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(\sqrt{x^2+y^2})^p}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$;

5) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^p}$, $D = \{(x,y) \mid y > 1+x^2\}$;

6) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1,\ x > 0,\ 0 < y < x^2\}$;

7) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(1-x^2-y^2)^p}$, $D = \{(x,y) \mid x+y < 1,\ x > 0,\ y > 0\}$;

8) $\iint\limits_D \dfrac{x^2\, dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$, $D = \{(x,y) \mid |y| < 1\}$;

9) $\iint\limits_D \sin(x^2+y^2)^p\, dxdy$, $D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$;

10) $\iint\limits_D \dfrac{dxdy}{(x+y)^p}$, $D = \{(x,y) \mid y > 0,\ x-y > 1\}$.

Литература

1 Виноградова, И. А. Математический анализ в задачах и упражнениях [Текст] / И. А. Виноградова, С. Н. Олейник, В. А. Садовничий. — М. : Изд-во Московского университета, 1991. — 352 с.

2 Гелбаум, Б. Контрпримеры в анализе [Текст] / Б. Гелбаум, Дж. Олмстед. — М. : Мир, 1967. — 251 с.

3 Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст] / Б. П. Демидович. — М. : Наука, 1990. — 624 с.

4 Зорич, В. А. Математический анализ: в 2 т. Т. 2 [Текст] / В. А. Зорич. — М. : Наука, 1984. — 543 с.

5 Камынин, Л. И. Курс математического анализа: в 2 т. Т. 2 [Текст] / Л. И. Камынин. — М. : Изд-во Московского университета, 1995. — 624 с.

6 Кудрявцев, Л. Д. Математический анализ: в 2 т. Т. 2 [Текст] / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высшая школа, 1973. — 466 с.

7 Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных [Текст] / Л. Д. Кудрявцев [и др.] — Санкт-Петербург, 1994. — 496 с.

8 Тер-Крикоров, А. М. Курс математического анализа [Текст] / А. М. Тер-Крикоров, М. И. Шабунин. — М. : Наука, 1988. — 813 с.

Учебное издание

Ющенко Дмитрий Петрович
Якубович Оксана Владимировна

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов математических специальностей вузов

Редактор В. И. Шкредова
Корректор В. В. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04. Подписано в печать 11.03.08. Формат 60 × 84 1/16. Бумага писчая № 1. Гарнитура "Таймс". Усл. печ. л. 5,69. Уч.-изд. л. 6,12. Тираж 100 экз. Заказ № .

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
"Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины"
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104